الجبر

للصف الثالث الاعدادى

الفصل الدراسى الأول

اعداد

أ/رفعت سعيد عبد المجيد

معلم أول (أ) رياضيات بمعهد شعشاع بالمنوفية



حاصل الضرب الديكارتى

الزوج المرتب

يسمى (أ ، ب) زوجا مرتبا ،ويسمى أ بالمسقط الأول ، ب بالمسقط الثانى

ملاحظات :

* (أ ،ب) ≠ (ب ، أ) بينما {أ ،ب} ={ب ، أ}

* فى المجموعات لا يمكن تكرار العناصر بينما فى الزوج المرتب يمكن تكرار العنصر

* لا يوجد زوج مرتب خال بينما فى المجموعات توجد مجموعة خالية ∅

* كل زو ج مرتب يمثل بنقطة واحدة فقط فى المستوى الاحداثى

تساوى زوجين مرتبين

اذا كان (أ ،ب) =(س ، ص) فإن أ = س ، ب =ص

أمثلة

مثال (١) اذا كان (أ – ٧، ب +٣) =(١١ ، ٢٣) أوجد قيمتى أ، ب

الحـــــــل :

أ - ٧ = ١١	ب+٣=٢٣
أ=١١+٧	ب=٢٣-٣
أ=١٨	ب=٢٠

مثال (٢) اذا كان (س^{٢} - ١، ٥)=(٩٩ ، $\sqrt[٣]{ص}$) أوجد قيمتى س ، ص

الحـــــــل

س^{٢} - ١=٩٩	$\sqrt[٣]{ص}$ =٥
س^{٢} =٩٩+١=١٠٠	ص = ٥^{٣}
س=± ١٠	ص=١٢٥

مثال (٣) اذا كان $(٣^{س-٢} ، س ص) = (٨١ ، ٦)$ فأوجد قيمتى س ، ص

الحـــــــــــل

$٣^{س-٢} = ٨١$

$٣^{س-٢} = ٣^{٤}$

س - ٢ = ٤

∴ س = ٦

س ص = ٦

∵ س = ٦

∴ ٦ص = ٦

∴ ص = ١

مثال (٤) اذا كان $(ﻫ^{٣} ، ٥ب) = (٣٤٣ ، ٢٠)$ فأوجد قيمة $\sqrt{٣ﻫ+ب}$

الحـــــــــــل

$ﻫ^{٣} = ٣٤٣$

$ﻫ = \sqrt[٣]{٣٤٣}$

ﻫ = ٧

٥ ب = ٢٠

ب = ٤

∴ قيمة $\sqrt{٣ﻫ+ب} = \sqrt{٣(٧)+٤} = \sqrt{٢١+٤} = \sqrt{٢٥} = ٥$

مثال (٥) اذا كان $\left(\frac{س}{١٠} ، ص^{-٢}\right) = \left(\frac{١}{٥} ، \frac{١}{٦٤}\right)$ فأوجد قيمتى س ، ص

الحـــــــــــل

$\frac{س}{١٠} = \frac{١}{٥}$

٥س = ١٠

س = ٢

$ص^{-٢} = \frac{١}{٦٤}$

$\frac{١}{ص^{٢}} = \frac{١}{٦٤}$

$ص^{٢} = ٦٤$

ص = ±٨

مثال (٦) اذا كان (س^{٥} ، ص+١) = (٣٢ ، $\sqrt[٣]{٢٧}$) أوجد قيمة س ، ص

الحـــــل

س^{٥} = ٣٢

س = ٢

ص+١ = $\sqrt[٣]{٢٧}$

ص=٣-١

ص = ٢

مثال (٧) اذا كان (أ+١ ، ٥) = (-٢، ب -١) أوجد قيمة ٢أ+ب

الحـــــل

أ+١ = -٢

أ = -٢-١

أ= -٣

ب -١ = ٥

ب = ٥ +١

ب = ٦

٢أ+ب=٢(-٣) + ٦ =صفر

مثال (٨) اذا كان (س -١، ص^{٣})=(٣ ، ١٢٥) أوجد قيمة س ، ص

الحـــــل

س-١ = ٣

س = ٣+١

س = ٤

ص^{٣} = ١٢٥

ص = $\sqrt[٣]{١٢٥}$

ص = ٥

مثال (٩) اذ ا كان (س -١ ، ١١) =(٨ ، ص +٣) أوجد قيمة $\sqrt{\text{س +٢ ص}}$

الحـــــل

س -١ = ٨

س = ٩

ص +٣ = ١١

ص = ٨

قيمة $\sqrt{\text{س +٢ ص}}$ = $\sqrt{٩ + ٢(٨)}$ = $\sqrt{٢٥}$ =٥

مثال ⑩ اذا كان (٢س^{٢} - ١ ، ص^{٣} - ٥) = (٧ ، ٥٩) احسب قيمة س ، ص

الحـــــل

٢س^{٢} - ١ = ٧

٢س^{٢} = ٧ + ١

٢س^{٢} = ٨

س^{٢} = ٤

س = ± ٢

ص^{٣} - ٥ = ٥٩

ص^{٣} = ٥٩ + ٥

ص^{٣} = ٦٤

ص = ٤

مثال ⑪ اذا كان (س + ٣ ، س + ٢ص) = (٥ ، ٦) احسب قيمة س ، ص

الحـــــل

س + ٣ = ٥

س = ٥ - ٣

س = ٢

س + ٢ص = ٦

٢ + ٢ص = ٦

٢ص = ٦ - ٢

ص = ٢

مثال ⑫ اذا كان (س^{٢} - ١ ، ٨) = (٤٨ ، $\sqrt[٣]{ص}$) احسب قيمة س ، ص

الحـــــل

س^{٢} - ١ = ٤٨

س^{٢} = ٤٩

س = ± ٧

$\sqrt[٣]{ص}$ = ٨

بتكعيب الطرفين

ص = ٥١٢

مثال ⑬ اذا كان (س^{٢} + ١ ، ٧) = (١٧ ، ص^{٣} - ١) احسب قيمة س ، ص

الحـــــل

س^{٢} + ١ = ١٧

س = ± ٤

ص^{٣} - ١ = ٧

ص^{٣} = ٨

ص = ٢

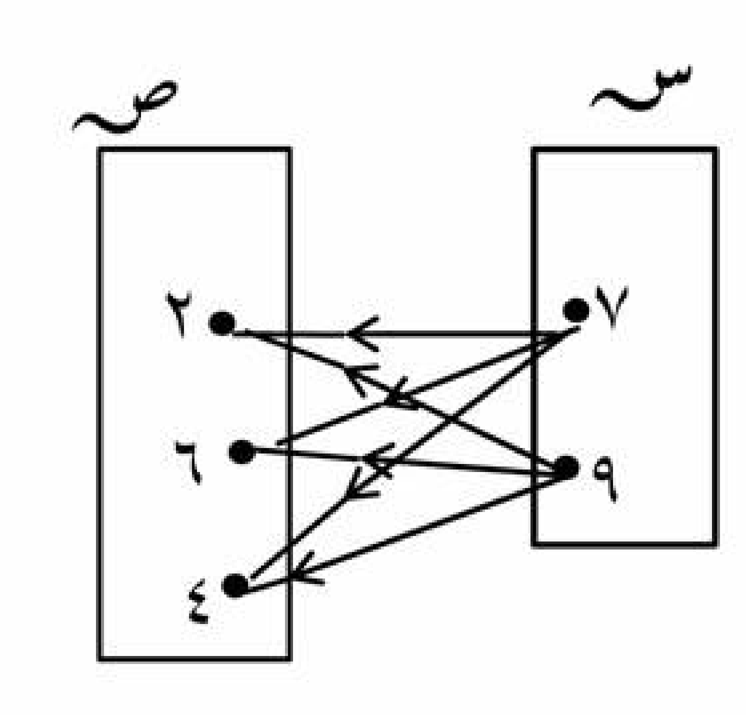
حاصل الضرب الديكارتى لمجموعتين منتهيتين وتمثيله

حاصل الضرب الديكارتى للمجموعة س في المجموعة ص ، ويرمز له بالرمز س × ص هو مجموعة جميع الازواج المرتبة التى مسقطها الاول عنصر ينتمى الى س ومسقطها الثانى عنصر ينتمى الى ص ويمثل بمخطط سهمى او بيانى

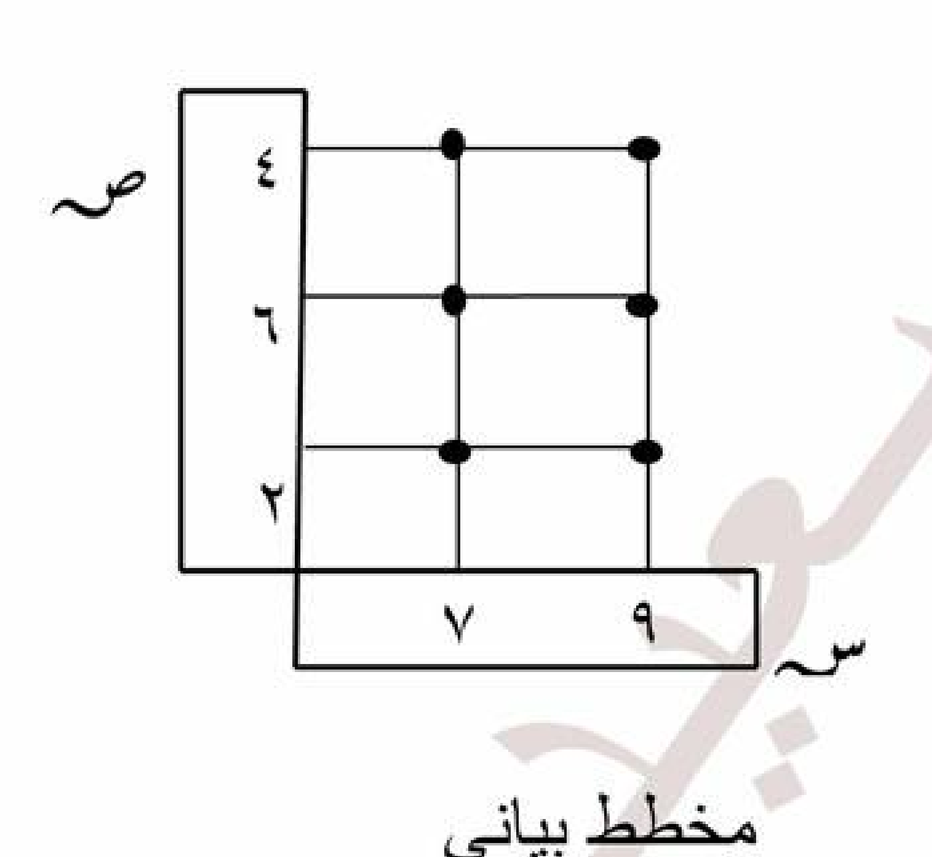
مثال

اذا كانت س = {٧،٩} ، ص= {٢،٦،٤} أوجد س × ص و مثله بمخطط سهمى و آخر بيانى

الحل: س × ص = {(٧،٢)،(٧،٦)،(٧،٤)،(٩،٢)،(٩،٦)،(٩،٤)}



مخطط سهمى



مخطط بيانى

حاصل الضرب الديكارتى لمجموعة فى نفسها

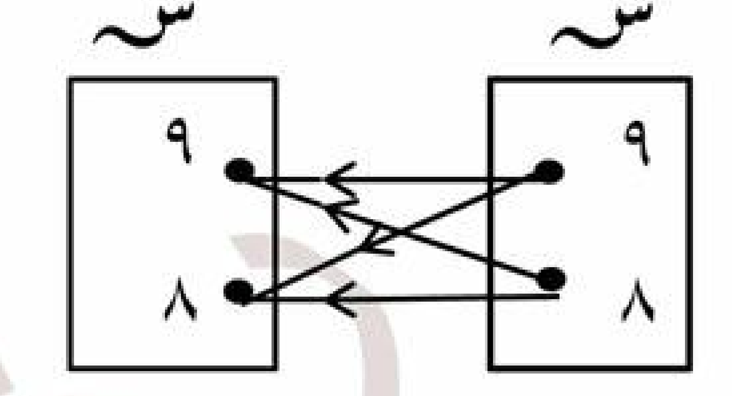
حاصل الضرب الديكارتى للمجموعة س فى نفسها ويرمز له بالرمز س × س أو بالرمز س^٢ ويقرأ "س اثنين" هو :مجموعة جميع الازواج المرتبة التى كل من مسقطها الاول والثانى عنصر من عناصر س .أى أن :

س × س = { (أ،ب): أ ∈ س ، ب ∈ س }

مثال اذا كانت سـ = {٩، ٨} أوجد سـ × سـ ومثله بمخطط سهمى و آخر بيانى

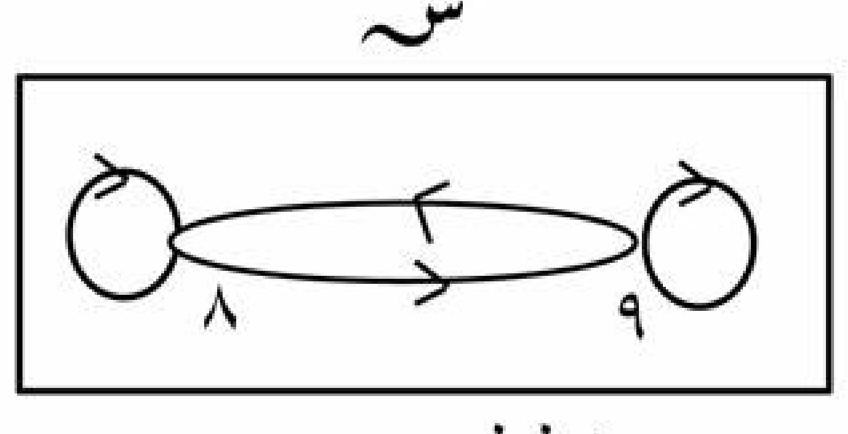
الحـــــــل:

سـ × سـ = {(٩، ٩)، (٩، ٨)، (٨، ٩)، (٨، ٨)}

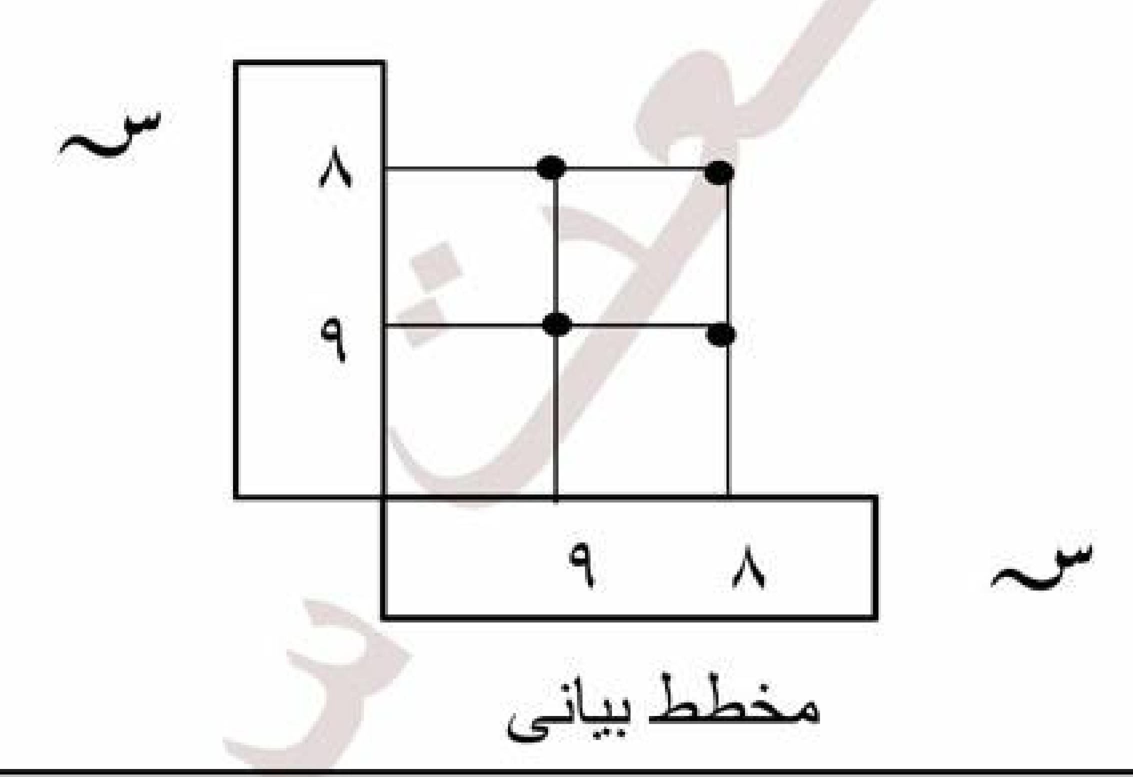


مخطط سهمى

أو



مخطط سهمى



مخطط بيانى

ملاحظات :

* سـ × صـ ≠ صـ × سـ

* سـ × ∅ = ∅ × سـ = ∅

* ن (سـ × صـ) = ن (صـ × سـ) = ن (سـ) × ن (صـ)

حيث ن ترمز الى عدد عناصر المجموعة

* اذا كان (أ ، ب) ∈ سـ × صـ فإن أ ∈ سـ ، ب ∈ صـ

* اذا كانت النقطة (س ، ص) تقع على محور السينات فإن ص = ٠

* اذا كانت النقطة (س ، ص) تقع على محور الصادات فإن س = ٠

أمثلة محلولة:

مثال اذا كانت ن(س^٢)=٢٥ ، وكان ص={٣ ، ٨ ، ٢} أوجد ن(س×ص)

الحــــل

∵ ن(س^٢)=٢٥ ∴ ن(س) = ٥

، ن(ص)=٣

∵ ن(س×ص)=ن(س)×ن(ص)

∴ ن(س×ص)=٥×٣=١٥

مثال أكمل :

اذا كانت النقطة (٩ ، ٢جـ - ١٠) تقع على محور السينات فإن جـ = ...

الحــــل

∵ النقطة تقع على محور السينات ∴ ٢جـ - ١٠ = صفر

∴ ٢جـ =١٠ ⇐ ∴ جـ = ١٠ / ٢ =٥

مثال أكمل :

اذا كانت النقطة (م - ١٢ ، ٦) تقع على محور الصادات فإن م = ...

الحــــل:

∵ النقطة تقع على محور الصادات ∴ م - ١٢ =صفر

∴ م = ١٢

مثال اذا كانت س = {٧،٩} ، ص={٩ ، ١٥ ، ١٧ } ، ع ={١٧، ١١}

أوجد: (١) (س ∩ ص)×ع (٢) س ×(ص - ع)

(٣) (س ∪ ص)×س

الحــــل

(١) (س ∩ ص)×ع = {٩}×{١٧، ١١}={(٩،١٧)،(٩ ،١١)}

(٢) س × (ص - ع) = {٧،٩} × {٩،١٥} = {(٧،٩)، (٧،١٥)، (٩،٩)، (٩،١٥)}

(٣) (س ∪ ص) × س = {١٧،١٥،٩،٧} × {٧،٩}

= {(١٧،٧)، (١٧،٩)، (١٥،٧)، (١٥،٩)، (٩،٧)، (٩،٩)، (٧،٧)، (٧،٩)}

حاصل الضرب الديكارتى للمجموعات الغيرمنتهية

مثال كون شبكة تربيعية متعامدة ع × ع ثم عين الربع الذى تقع فيه النقاط الآتية :

ٱ (٢،٥) ، ب(-٣ ، ٤) ، جـ (٥،-٣) ، هـ (-٤ ، -١)

الربع الثانى (- ، +)	الربع الأول (+ ، +)
الربع الثالث (- ، -)	الربع الرابع (+ ، -)

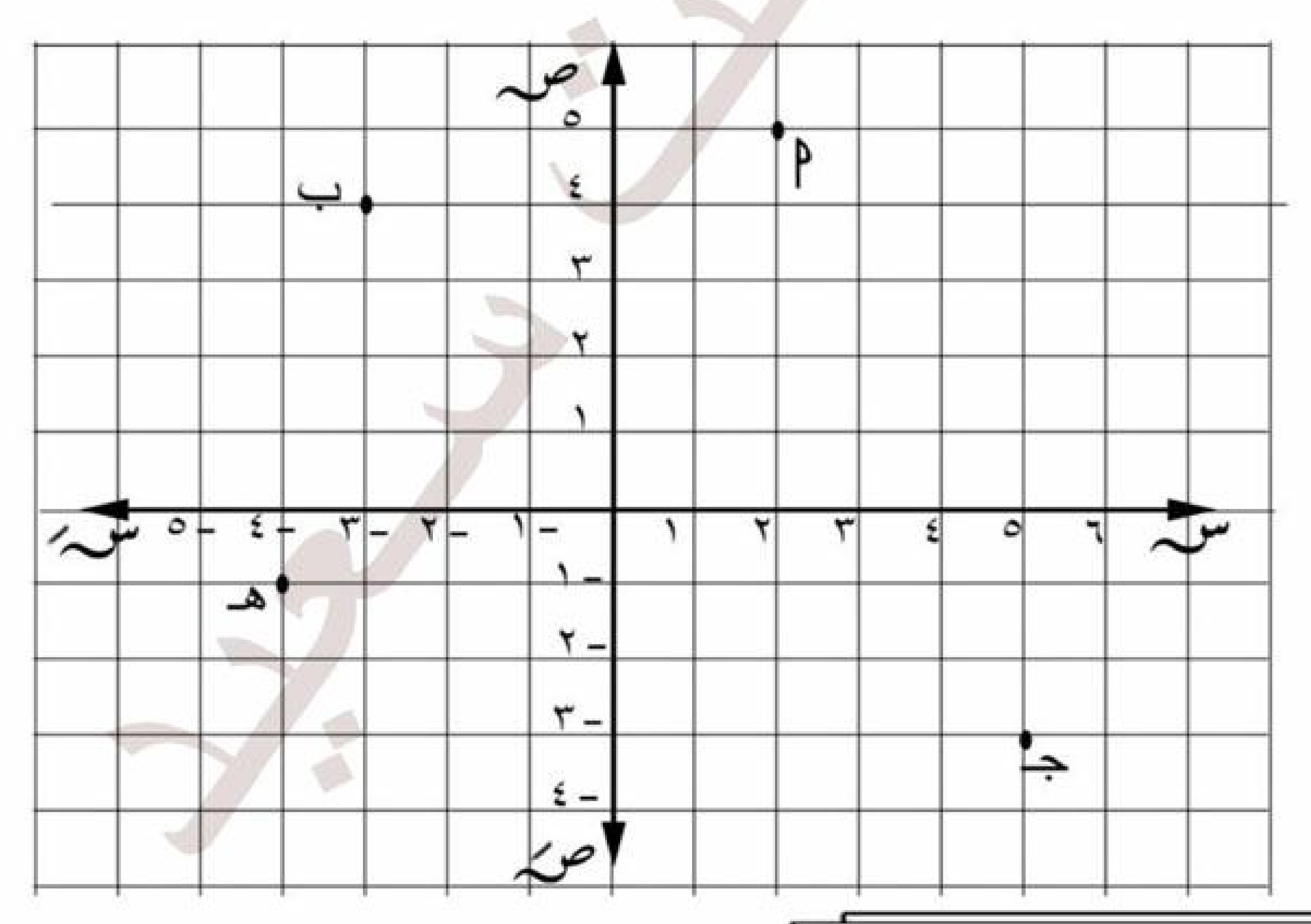
الحل

ٱ (٢،٥) تقع فى الربع الأول

ب (-٣ ، ٤) تقع فى الربع الثانى

جـ (٥،-٣) تقع فى الربع الرابع

هـ (-٤ ، -١) تقع فى الربع الثالث



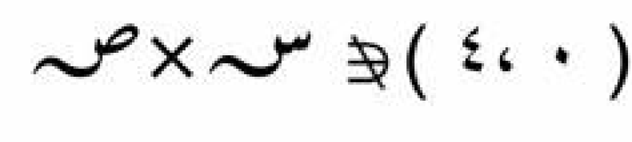
حاصل الضرب الديكارتى لفترتين

حاصل الضرب الديكارتى لفترتين هو مجموعة جزئية من حاصل الضرب الديكارتى ع × ع لأن أى فترة هى مجموعة جزئية من ع

أمثلة اذا كانت س = [١، ٤] ، ص =[١، ٢] فمثل بيانيا المنطقة التى تمثل س × ص

وبين أى من النقاط الاتية ينتمى لحاصل الضرب الديكارتى س × ص

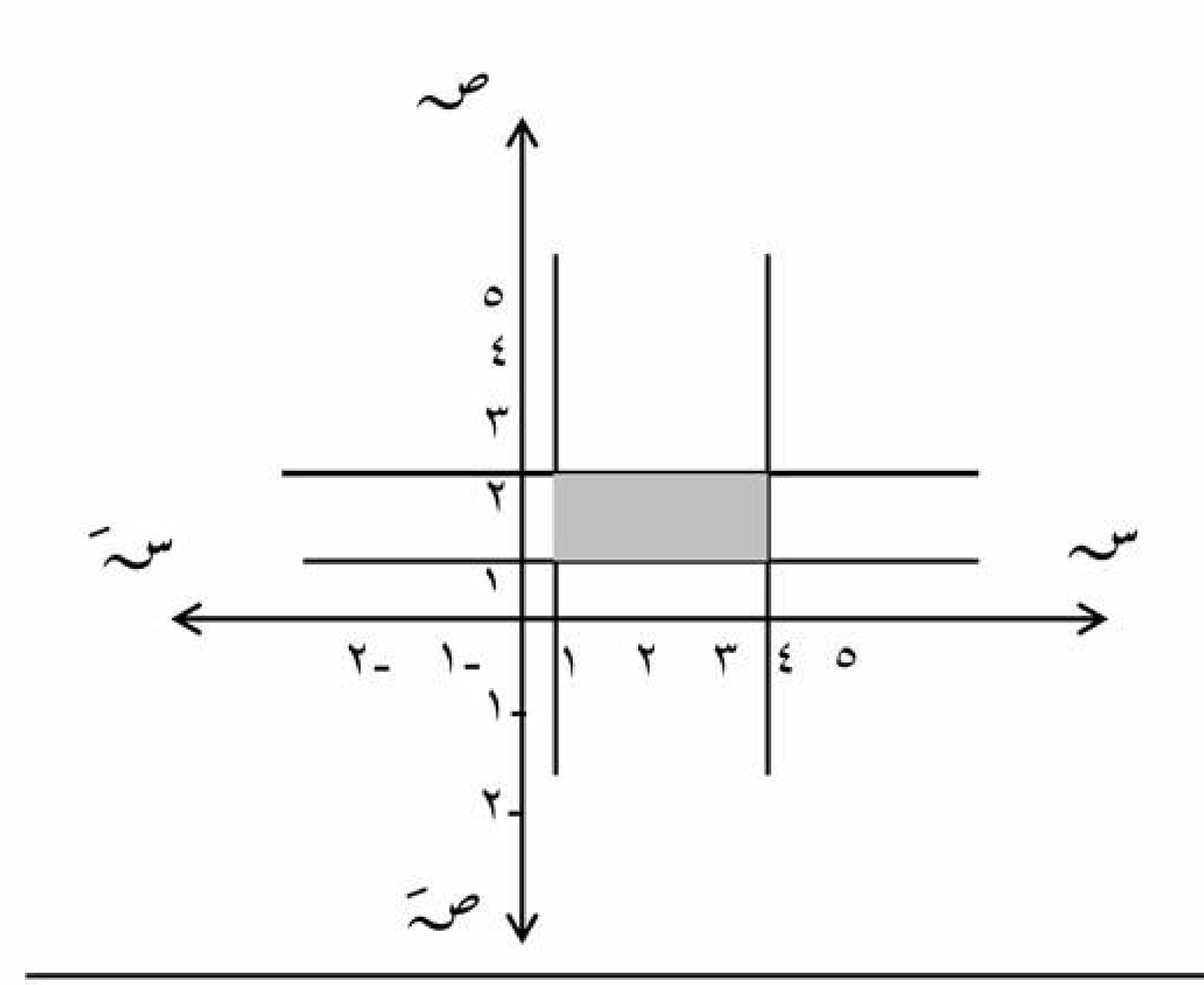
(٠ ، ٤) ، (٢،٢) ، (٤،٢)



(٠ ، ٤) ∉ س × ص

(٢،٢) ∈ س × ص

(٤،٢) ∈ س × ص



تمارين محلولة

(١) اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة:

① اذا كانت النقطة (ﻫ،ب) تقع فى الربع الثانى فإن ﻫب...... صفر

(ﻫ) > (ب) < (جـ) =

② اذا كان (٩،٧) ∈ {٩،٥} × {س،١} فإن س =.......

(ﻫ) ٧ (ب) ٥ (جـ) ٩

③ {٢} × {٣} = ...

(ﻫ) {(٢،٣)} (ب) ٦ (جـ) {٦}

④ اذا كانت س = {٧،٦} فإن ن(س × ∅) = ...

(ﻫ) صفر (ب) ∅ (جـ) ٢

⑤ النقطة .... تقع فى الربع الثالث

(ﻫ) (-٣ ،-٤) (ب) (-٤ ، ٥) (جـ) (٤ ، -٣)

⑥ اذا كانت ن(س^٢) = ٦٤ فإن ن(س) = ...

(ﻫ) ٨ (ب) ±٨ (جـ) ٤

⑦ اذا كانت (س-٧ ، ٩- س) حيث س ∈ ص تقع فى الربع الأول فإن س = ...

(ﻫ) ٨ (ب) ٧ (جـ) ٩

الحـــــل

① > ② ٧ ③ {(٢،٣)} ④ صفر

⑤ (−٣،−٤) ⑥ ٨ ⑦ ٨

---

(٢) أكمل ما يلى :

① اذا كانت س × ص = {(٢،١)،(٢،٣)،(٢،٥)} فإن ن(س) + ن(ص^{2}) = ...

② اذا كانت س = {٥} فإن س^{2} = ...

③ اذا كانت (٣،٥) ∈ {٣،٦} × {س + ١، ٨} فإن س = ...

④ النقطة (٤،٠) تقع على محور ....

⑤ النقطة (س^{2} ، ص^{2}) تقع فى الربع ....حيث س ≠ ٠ ، ص ≠ ٠

⑥ اذا كانت النقطة (س،٧) تقع على محور الصادات فإن ٥$^{\text{س}+٢}$ = ...

⑦ اذا كانت النقطة (م ، ب) تقع على محور الصادات فإن $\frac{\text{م}}{\text{ب}}$ = ...

⑧ اذا كانت ب < ٣ فإن النقطة (٥ ،ب -٣) تقع فى الربع ......

⑨ اذا كانت س = {١،٢} ، ص = {٣،٥} فإن (٥،١) ∈ ......

⑩ {٨،٩} × {٨،٦} = {.....} × {.....}

⑪ اذا كان (|س| ، ٤) =(٣ ، ص^{2}) والنقطة (س، ص) تقع فى الربع الثانى فإن

س+ ص = ...

⑫ اذا كان س × ص = {(٤،٢)،(٤،٣)،(٣،٢)،(٣،٣)،(٢،٢)،(٢،٣)}

فإن س ∩ ص = ...

⑬ اذا كان {٢} × {س ، ص} = {(٢،٤)،(٢،٣)} فإن س – ص = ...

(١٤) اذا كانت سَ ⊂ صَ ، وكان ن (سَ×صَ) = ٦ ، ٤ ∈ سَ ، (١،٧) ∈ سَ×صَ فإن سَ =.... ، صَ =......

الحـــل

(١) ١٠ (٢) {(٥،٥)} (٣) س=٤ (٤) محور السينات

(٥) الربع الأول (٦) ٢٥ (٧) $\frac{أ}{ب}$ = صفر (٨) الربع الرابع

(٩) صَ×سَ (١٠) {٨} × {٩،٦} (١١) س+ص = −١

(١٢) سَ∩صَ = {٢،٣} (١٣) ±١ (١٤) سَ = {١،٤}، صَ = {١،٤،٧}

---

(٣) ذا كانت سَ − صَ = {٩}، صَ − سَ = {٧} ، سَ∩صَ = {٦،٤}

أوجد: (١) سَ،صَ

(٢) (سَ − صَ) × سَ

(٣) (صَ − سَ) × (سَ∪صَ)

الحـــل

(١) سَ = {٦،٤،٩} ، صَ = {٦،٤،٧}

(٢) (سَ − صَ) × سَ = {٩} × {٦،٤،٩} = {(٩،٦)،(٩،٤)،(٩،٩)}

(٣) (صَ − سَ) × (سَ∪صَ) = {٧} × {٦،٤،٧،٩}

= {(٧،٦)،(٧،٤)،(٧،٧)،(٧،٩)}

---

(٤) اذا كان ($\frac{س+ص}{٧}$ ، $\sqrt[٣]{-٨}$) = (١ ، ص) اوجد قيمتى س ، ص

الحـــل

$\frac{س+ص}{٧}$ = ١

∵ ص = −٢

∴ س=٩

$\sqrt[٣]{-٨}$ = ص

∴ ص = −٢

(٥) اذا كانت أ (٢،٣) ، ب (−١،٣) ، جـ (−١،−١) فعين على الشبكة التربيعية ع×ع

النقط أ، ب ،جـ ثم أكمل ما يلى :

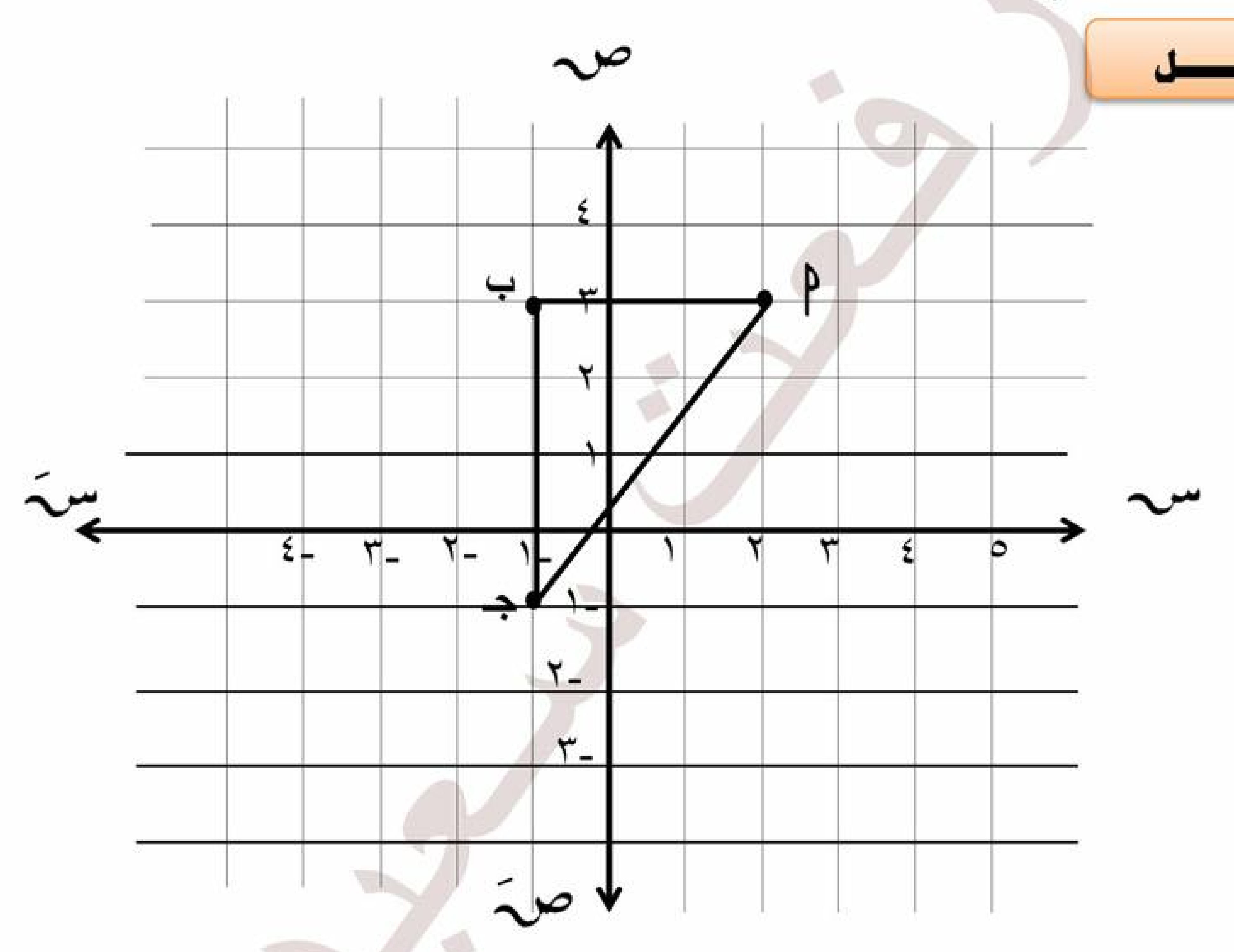
(١) ق (∠أ ب جـ) = ...

(٢) الشكل أ ب جـ يسمى ......

(٣) محيط الشكل أ ب جـ =.....

(٤) مساحة الشكل أ ب جـ = ...

الحـــــل



(١) ق (∠أ ب جـ) = ٩٠°

(٢) الشكل أ ب جـ يسمى مثلث

(٣) محيط الشكل أ ب جـ =٣+٤+٥=١٢ سم

(٤) مساحة الشكل أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ ×٣×٤=٦ سم^{٢}

---

(٦) اذا كان ($\frac{س}{ص}$ ، ص+٢) =(−١ ،٥) أوجد قيمة ص^{س}

الحـــل

س= −٣ ، ص =٣

∴ ص^{س}=(٣)$^{−٣}$ = $\frac{١}{٢٧}$

(٧) اذا كانت س = {١،٢،٣} ، ص = {٢،٣،٥} ، ع = {٤،٦} أثبت أن:

ع × (س − ص) = (ع × س) − (ع × ص)

الحل

ع × (س − ص) = {٤،٦} × {١} = {(٤،١)،(٦،١)} ⟵ (١)

(ع × س) = {(٤،١)،(٤،٢)،(٤،٣)،(٦،١)،(٦،٢)،(٦،٣)}

ع × ص = {(٤،٢)،(٤،٣)،(٤،٥)،(٦،٢)،(٦،٣)،(٦،٥)}

(ع × س) − (ع × ص) = {(٤،١)،(٦،١)} ⟵ (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن ع × (س − ص) = (ع × س) − (ع × ص)

---

(٨) أكمل ما يلى :

اذا كان س ∋ ح̄ فإن النقطة (- س ، ∛س) تقع فى الربع ......

الحل تقع فى الربع الرابع

---

(٩) بالاستعانة بشكل فن المقابل أوجد :

(١) (ص − ع) × س

(٢) س × (ص ∩ ع)

(٣) (س − ص) × ع

س: ١، ٢ — ص: ٣، ٥، ٧ — ع: ٥، ٧، ٩

الحل

(١) (ص − ع) × س = {٣} × {١،٢} = {(٣،١)،(٣،٢)}

(٢) س × (ص ∩ ع) = {١،٢} × {٥،٧}

= {(١،٥)،(١،٧)،(٢،٥)،(٢،٧)}

(٣) (س − ص) × ع = {١،٢} × {٥،٧،٩}

= {(١،٥)،(١،٧)،(١،٩)،(٢،٥)،(٢،٧)،(٢،٩)}

⑩ **إذا كان أ = {١ ، ٤} ، ب = {٢ ، ٤} ، جـ = {١ ، ٥} أوجد :**

① $(\text{أ} \times \text{ب}) \cap (\text{ب} \times \text{جـ})$ ② $(\text{أ} \cup \text{ب}) \times (\text{ب} \cup \text{جـ})$

③ $(\text{أ} - \text{ب}) \times \text{جـ}$ ④ $(\text{أ} \cap \text{ب}) \times (\text{ب} \cap \text{جـ})$

الحـــــل

① $(\text{أ} \times \text{ب}) = \{\text{١،٤}\} \times \{\text{٢،٤}\} = \{(\text{١،٢}),(\text{١،٤}),(\text{٤،٢}),(\text{٤،٤})\}$

$(\text{ب} \times \text{جـ}) = \{\text{٢،٤}\} \times \{\text{١،٥}\} = \{(\text{٢،١}),(\text{٢،٥}),(\text{٤،١}),(\text{٤،٥})\}$

$(\text{أ} \times \text{ب}) \cap (\text{ب} \times \text{جـ}) = \emptyset$

② $(\text{أ} \cup \text{ب}) = \{\text{١،٢،٤}\}$

$(\text{ب} \cup \text{جـ}) = \{\text{١،٢،٤،٥}\}$

$(\text{أ} \cup \text{ب}) \times (\text{ب} \cup \text{جـ}) = \{\text{١،٢،٤}\} \times \{\text{١،٢،٤،٥}\}$

$= \{(\text{١،١}),(\text{١،٢}),(\text{١،٤}),(\text{١،٥}),(\text{٢،١}),(\text{٢،٢}),(\text{٢،٤}),(\text{٢،٥}),(\text{٤،١}),(\text{٤،٢}),(\text{٤،٤}),(\text{٤،٥})\}$

③ $(\text{أ} - \text{ب}) = \{\text{١}\}$

$(\text{أ} - \text{ب}) \times \text{جـ} = \{\text{١}\} \times \{\text{١ ، ٥}\} = \{(\text{١،١}),(\text{١،٥})\}$

④ $(\text{أ} \cap \text{ب}) = \{\text{٤}\}$ $(\text{ب} \cap \text{جـ}) = \emptyset$

$(\text{أ} \cap \text{ب}) \times (\text{ب} \cap \text{جـ}) = \{\text{٤}\} \times \emptyset = \emptyset$

---

⑪ إذا كانت س = {٢،٥} ، ص = {٢،٤} ، ع = {٤،٦} أوجد :

① $\text{ن}(\text{س} \times (\text{ص} \cup \text{ع}))$ ② $(\text{س} - \text{ص}) \times (\text{ع} \cap \text{ص})$

الحـــــل

① $\text{ص} \cup \text{ع} = \{\text{٢،٤،٦}\}$ $\text{س} \times (\text{ص} \cup \text{ع}) = \{\text{٢،٥}\} \times \{\text{٢،٤،٦}\}$

$\text{ن}(\text{س} \times (\text{ص} \cup \text{ع})) = \text{٦}$

② $(\text{س} - \text{ص}) \times (\text{ع} \cap \text{ص}) = \{\text{٥}\} \times \{\text{٤}\} = \{(\text{٥،٤})\}$

⑫ اذا كانت س = {٣،٤} ، ص = {٤،٥} ، ع = {٦،٥} أوجد:

① س × (ص ∩ ع)　　② (س − ص) × ع　　③ (س − ص) × (ص − ع)

الحل

① س × (ص ∩ ع) = {٣،٤} × {٥} = {(٣،٥)،(٤،٥)}

② (س − ص) × ع = {٣} × {٦،٥} = {(٣،٦)،(٣،٥)}

③ (س − ص) × (ص − ع) = {٣} × {٤} = {(٣،٤)}

---

⑬ اذا كانت س × ص = {(١،١)،(١،٣)،(١،٥)} أوجد:

① س ، ص　　② ص × س　　③ ص٢

الحل

① س = {١} ، ص = {١،٣،٥}　　② ص × س = {(١،١)،(٣،١)،(٥،١)}

③ ص٢ = {(١،١)،(١،٣)،(١،٥)،(٣،١)،(٣،٣)،(٣،٥)،(٥،١)،(٥،٣)،(٥،٥)}

---

⑭ اذا كانت س = [-٢ ، ٣] أوجد المنطقة التى تمثل س × س ثم بين أى من النقاط التالية تنتمى الى الحاصل الديكارتى س × س

أ(١ ، ٢) ، ب(٣ ، -١) ، جـ(-١ ، ٤) ، ء(-٢ ، ٠)

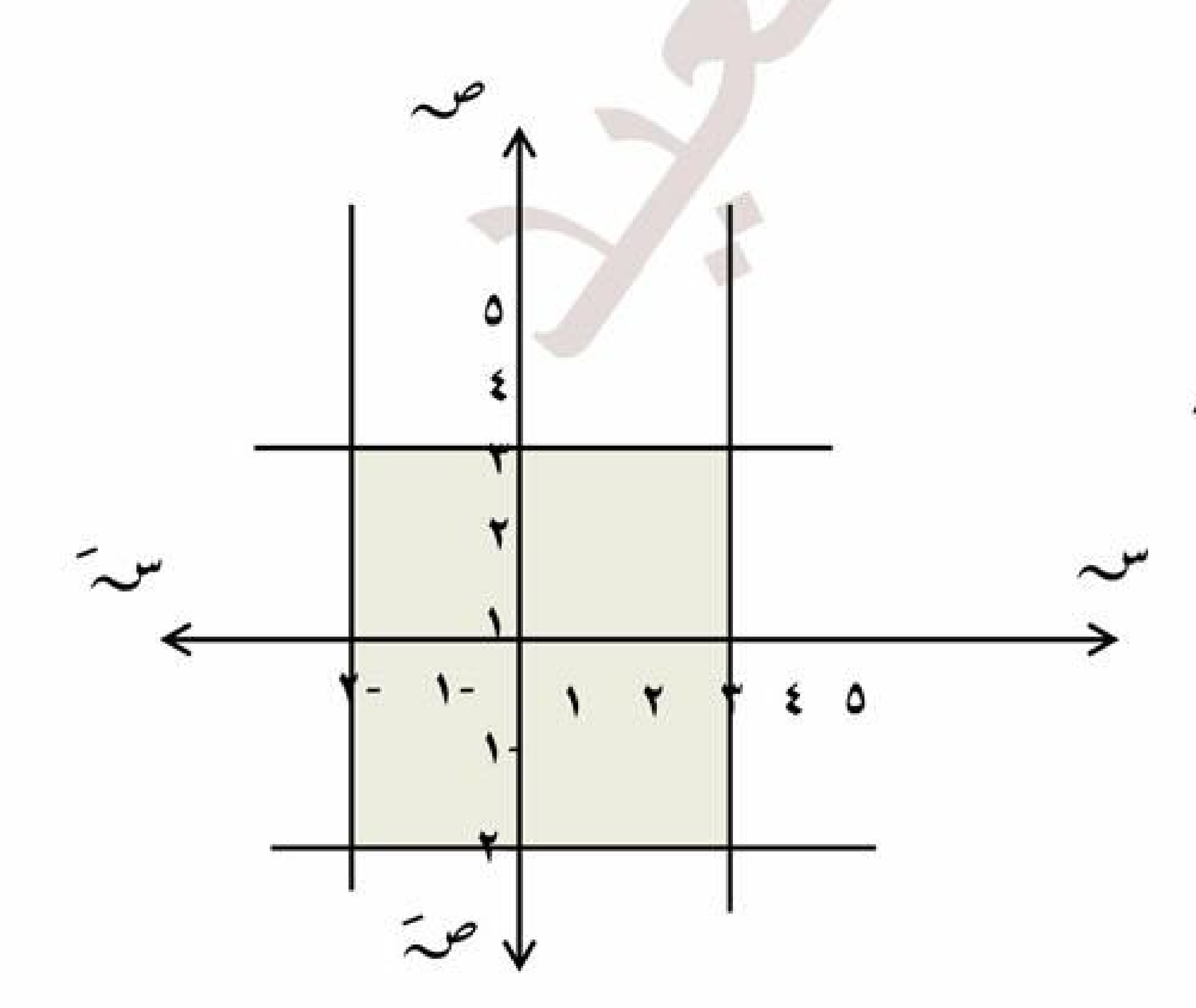
الحل

أ(١ ، ٢) ∈ س × س

ب(٣ ، -١) ∈ س × س

جـ(-١ ، ٤) ∉ س × س

ء(-٢ ، ٠) ∈ س × س



العلاقـــــات

العلاقة من مجموعة س الى مجموعة ص هى ارتباط يربط بعض او كل عناصر س ببعض او كل عناصر ص

ملاحظـــــات

* العلاقة ع من س الى ص تكون مجموعة جزئية من الحاصل الديكارتى س × ص

*اذا كان $(أ، ب) \in$ ع فاننا نكتب أ ع ب

*بيان ع هو مجموعة من الازواج المرتبة التى مسقطها الاول ينتمى الى المجموعة س ومسقطها الثانى ينتمى الى المجموعة ص ويرتبط المسقط الاول فى كل منها بالمسقط الثانى بهذ ه العلاقة

* اذا كانت العلاقة ع من س الى س فاننا نقول ان ع علاقة على س ويكون

ع $\subset$ س × س

تماريـــــن محلولة

(١) اذا كانت س = {١، ٢، ٣} ، ص = {٣، ٤، ٥} بين مع ذكر السبب ايا مما يأتى يمثل علاقة من س الى ص

① ل = {(١، ٣)، (٣، ٣)، (٥، ٣)}

② م = {(٢، ٤)، (١، ٣)، (٣، ٣)، (٣، ٤)}

الحـــــل

① ل لا تمثل علاقة لأن ل $\not\subset$ س × ص

② م تمثل علاقة لأن م $\subset$ س × ص

---

(٢) اذا كانت ع علاقة على ط حيث ط مجموعة الاعداد الطبيعية وكانت أ ع ب تعنى أن "أ × ب = ١٢" لكل أ، ب $\in$ ط أكمل ما يلى :

(١)اذا كان $٢ ع ٤$ فإن $٢ = \dots\dots$ (٢)اذا كان $٢ ع ٣٢$ فإن $٢ = \dots\dots$

(٣)اذا كان $(٢،٣٢) \in$ ع فإن $٢ = \dots$(٤) اذا كان $\frac{١}{٣}$ ٢ ع ٦ فإن $٢ = \dots$

(٥) اذا كان$(\frac{٣}{٤}٢ ، ٢) \in$ ع فإن $٢ = \dots\dots$

الحـــــل

(١) $٢=٣$ (٢) $٢=٢$ (٣) $٢=٢$ (٤) $٢=٦$ (٥) $٢=٤$

---

(٣)اذا كانت سـ = {٣،٥،٧،٩} ، صـ= {$٢ \in$ط: ١٠ $\leqslant ٢ < ٥٠$ }وكانت ع علاقة من سـ الى صـ بيانها كالاتى :ع= {(٣،١٥)،(٥،٢٥)،(٧،٣٥)،(٩،٤٥)}

اكتب قاعدة العلاقة ع

الحـــــل

قاعدة العلاقة هى :ص=٥س لكل س$\in$سـ ، ص $\in$صـ

---

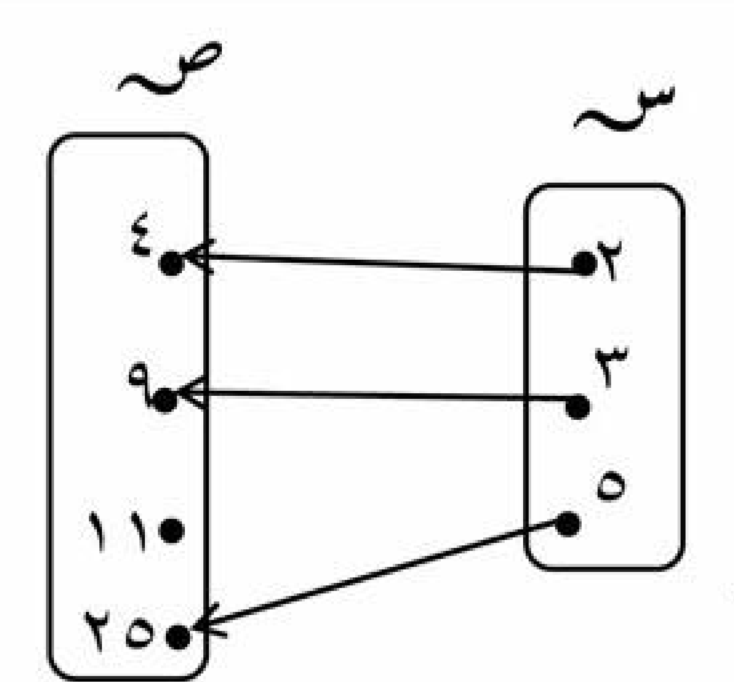
(٤) فى الشكل المقابل

ع علاقة من سـ الى صـ

١ اوجد ن (سـ × صـ)

٢ اكتب بيان ع

٣ اكتب ما تعنيه العلاقة ٢ع ب حيث $٢ \in$سـ، ب$\in$صـ



الحـــــل

١ ن (سـ × صـ) = ٣ × ٤ = ١٢

٢ بيان ع = {(٢،٤)،(٣،٩)،(٥،٢٥)}

٣ ٢ع ب تعنى أن $٢^{٢}$ = ب لكل $٢ \in$سـ، ب$\in$صـ

---

(٥)اذا كانت ع علاقة على مجموعة الاعداد الحقيقية الموجبة $ح^{+}$حيث س ع ص

تعنى ان "$ص^{٢} = ٢س$" لكل س$\in ح^{+}$، ص $\in ح^{+}$

اذا كان كل من الازواج المرتبة التالية ينتمى لبيان ع: $(٢،٢)$،$(\frac{٢}{٩}$ ، ب)،(جـ ،٣) ،

$(\frac{٩}{٣٢}$ ،ء) أوجد قيمة ٢، ب ، جـ ، ء

الحـــــل

أ=٢ ، ب= $\frac{٢}{٣}$ ، جـ = ٤,٥ ، ء= $\frac{٣}{٤}$

---

(٦) اذا كانت سـ = {٢،٤،٦،٨} ، صـ= {٣،٥،٦} ، ل= {٤،٥،٧} أكمل مكان النقط بالمجموعة المناسبة :

[١] ع١ ={(٢،٣)،(٦،٥)} علاقة من ...... الى .....

[٢] ع٢ ={(٣،٧)،(٥،٥)} علاقة من ..... الى ....

[٣] ع٣ ={(٤،٨)،(٥،٢)} علاقة من .....الى .....

[٤] ع٤ ={(٥،٨)،(٦،٢)} علاقة من .....الى .....

الحـــــل

(١) علاقة من سـ الى صـ

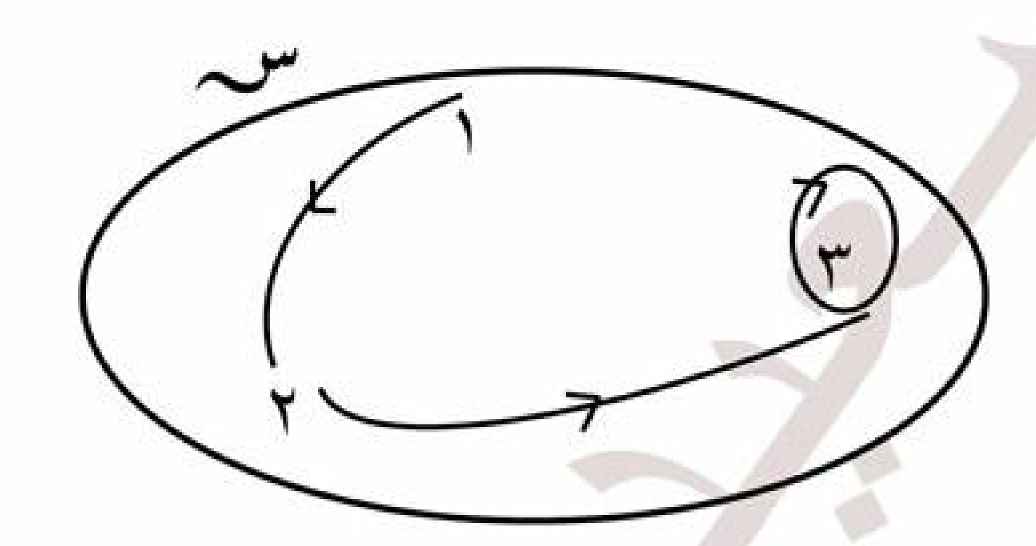
(٢) علاقة من صـ الى ل

(٣) علاقة من ل الى سـ

(٤) علاقة من صـ الى سـ

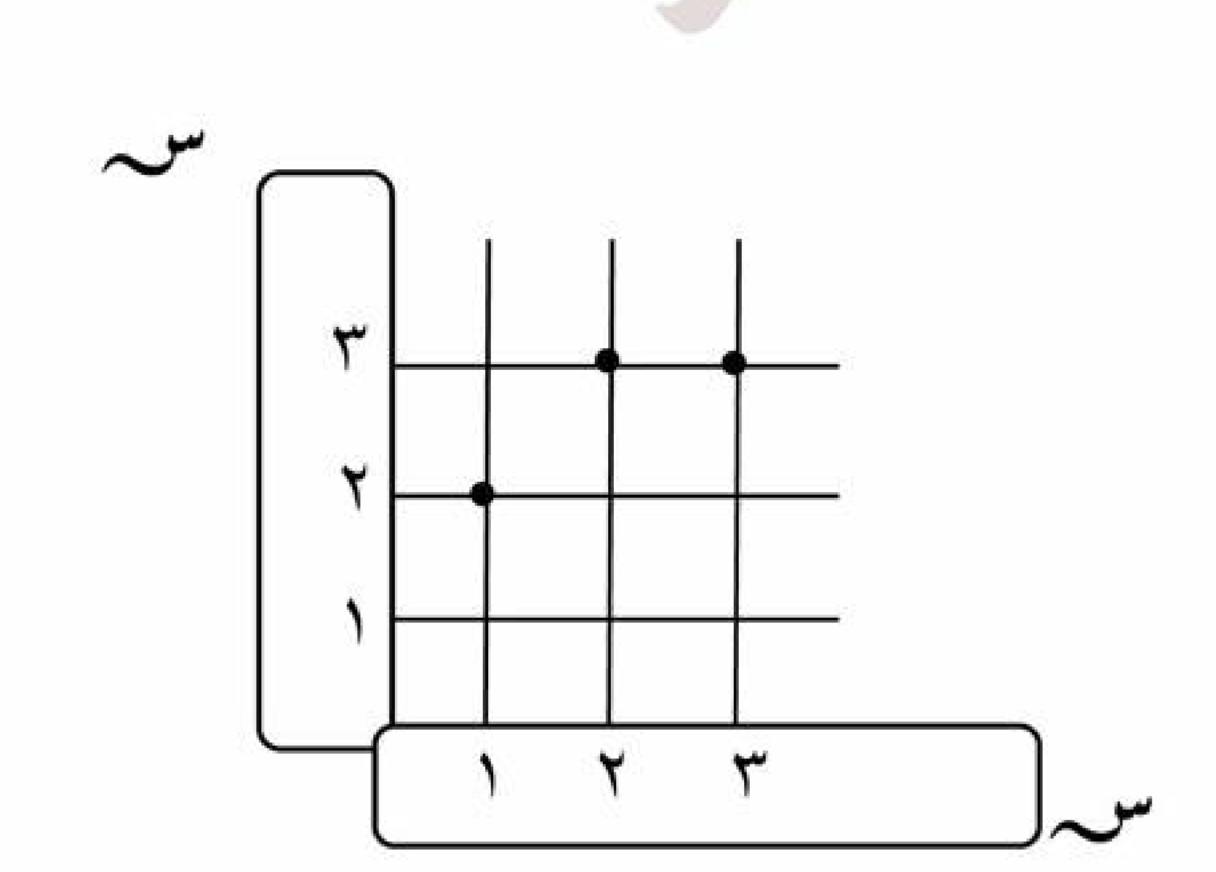
---

(٧) الشكل المقابل يمثل مخططا سهميا للعلاقة ع المعرفة على المجموعة سـ={١،٢،٣} اكتب بيان ع ومثلها بمخطط بيانى





بيان ع ={(٣،٣) ، (٢،٣)،(١،٢)}



(٨) اذا كانت س = {١، ٠ ، -١} وكانت $ع_١$ علاقة المعكوس الجمعى على س ، $ع_٢$ علاقة المعكوس الضربى على س اوجد ع = $ع_١ \cap ع_٢$

الحـــــــــل

$ع_١$ = {(١، -١)،(٠،٠)،(-١، ١)}

$ع_٢$ = {(١، ١)،(-١، -١)}

ع = $ع_١ \cap ع_٢$ = $\emptyset$

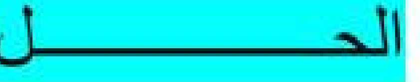
---

(٩) اذا كانت س = {٣، ٥، ٤، ١٣، ١٠}، ص = {٤، ٢٥، ١٩، ٩، ٨، ٧، ٥} وكانت ع علاقة من س الى ص حيث ٢ ع ب تعنى ان " ب = ٢٢ - ١ " لكل ٢ ∈ س ، ب ∈ ص

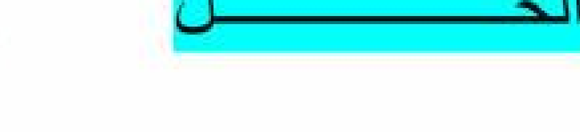
(١) اكتب بيان ع (٢) مثل ع بمخطط سهمى

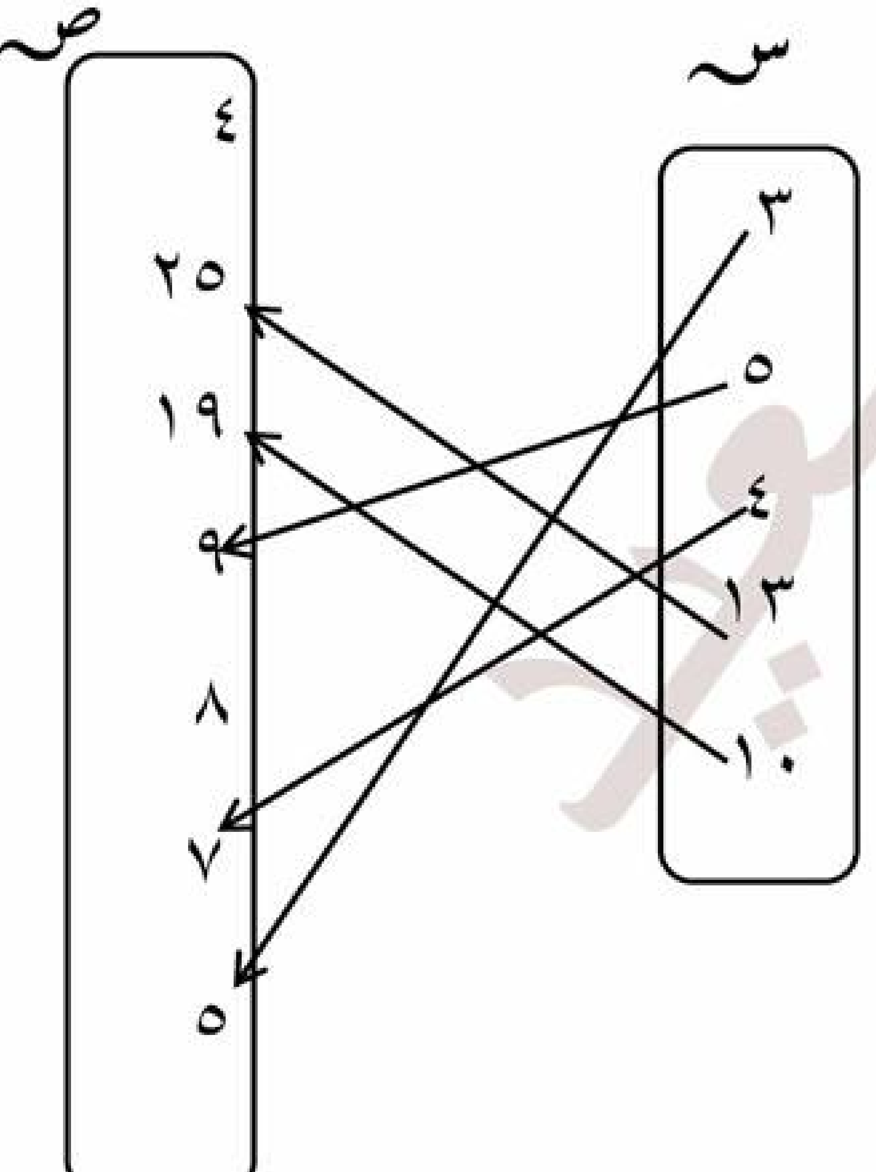
(٣) اذا كان $\frac{١}{٢}$ك ع ١٩ فأوجد قيمة ك (٤) ما قيمة س اذا كان (س،٩) ∈ بيان العلاقة ع





الحـــــــــل





(١) بيان ع =

{(٣،٥)،(٥،٩)،(٤،٧)،(١٠،١٩)،(١٣،٢٥)}

(٣) ∵ $\frac{١}{٢}$ك ع ١٩

٢ × $\frac{١}{٢}$ك - ١ = ١٩

ك - ١ = ١٩ ⟸ ك = ٢٠

(٤) ∵ (س،٩) ∈ بيان العلاقة ع

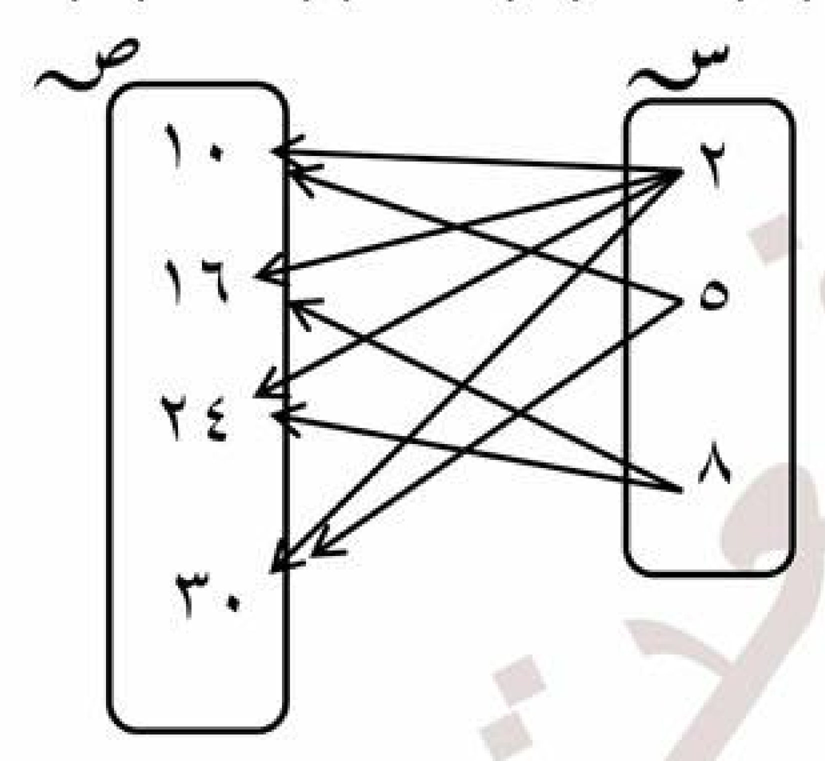
∴ س = ٥

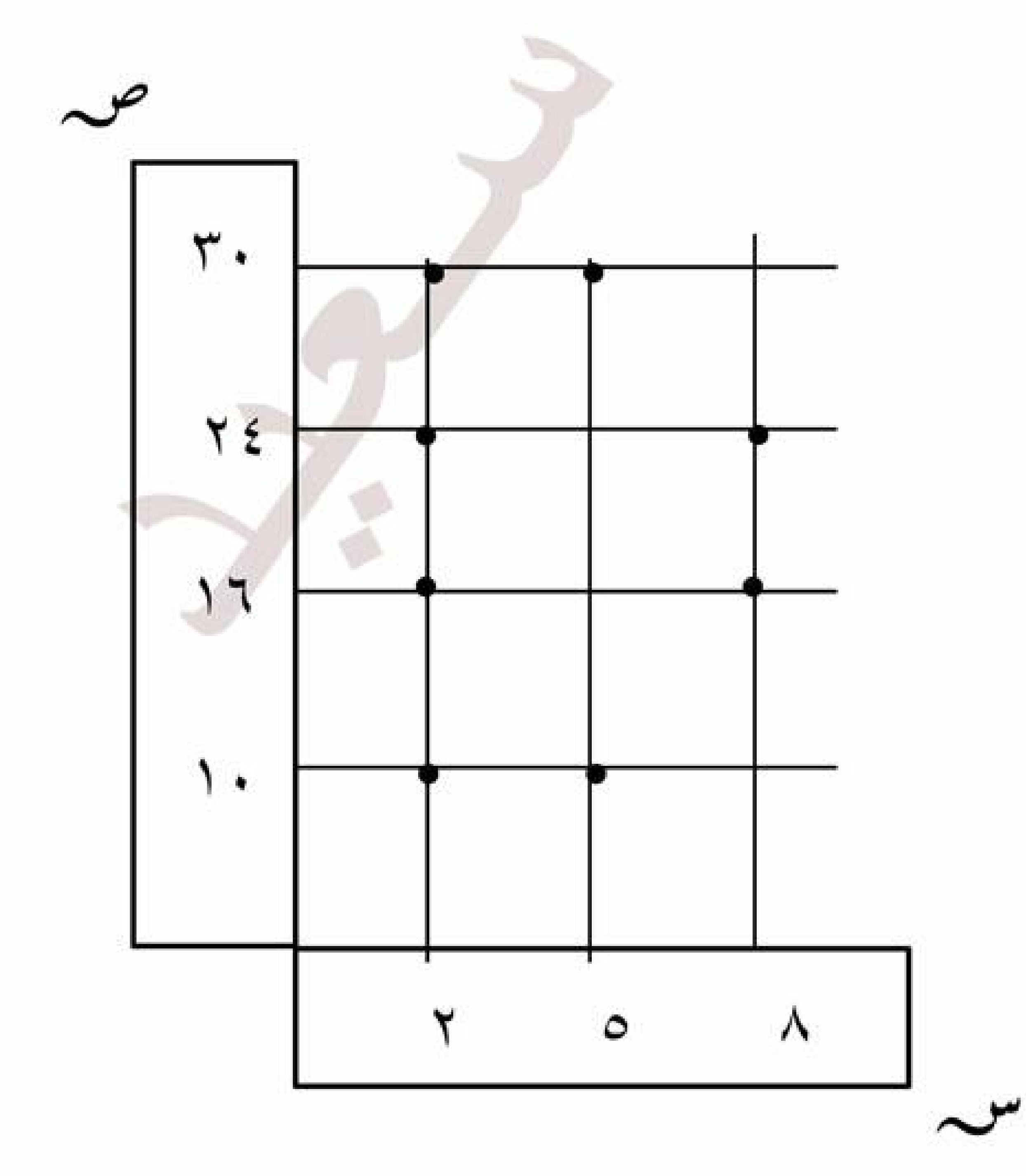
⑩ اذا كانت س = { ٢، ٥، ٨ } ، ص = { ١٠، ١٦، ٢٤، ٣٠ } وكانت ع علاقة من س الى ص حيث " م ع ب " تعنى ان "م عامل من عوامل ب" لكل م ∈ س ، ب ∈ ص

اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى واخر بيانى

الحـــــــل

ع = {(٢، ١٠)، (٢، ١٦)، (٢، ٢٤)، (٢، ٣٠)، (٥، ١٠)(٥، ٣٠)، (٨، ١٦)، (٨، ٢٤)}





الدالة

يقال لعلاقة من س الى ص انها دالة اذا تحققت احدى الحالات الاتية:

(١) فى بيان العلاقة :كل عنصر من عناصر س يظهر مرة واحدة فقط كمسقط اول فى احد الازواج المرتبة التى تنتمى الى بيان العلاقة

(٢) فى المخطط السهمى :كل عنصر من عناصر س يخرج منه سهم واحد فقط

(٣) فى المخطط البيانى :كل خط رأسى تقع عليه نقطة واحدة فقط من النقط التى تمثل العلاقة

ملاحظـــات

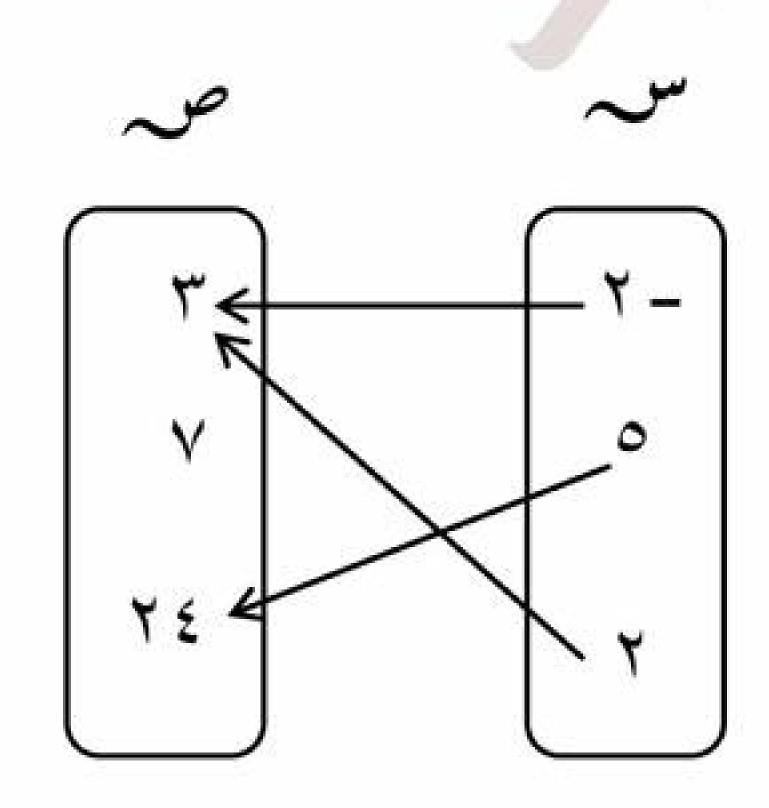
اذا كانت د دالة من المجموعة س الى المجموعة ص فإن :

* المجموعة س تسمى مجال الدالة
* المجموعة ص تسمى المجال المقابل للدالة
* مجموعة صور عنا صر مجموعة المجال س بالدالة د تسمى مدى الدالة

تمـــارين محلولة

(١) اذا كانت س ={- ٢ ،٥ ،٢}، ص={٣ ، ٧ ، ك }وكانت ع دالة من س الى ص حيث أ ع ب تعنى ان " ب= أ^{٢} - ١ " لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص. أوجد قيمة ك ومثل الدالة بمخطط سهمى

الحـــــــل



لكى تكون ع دالة من س الى ص يجب أن يكون

كل عنصر من س له صورة وحيدة فى ص

∵ - ٢ صورتها ٣ ، ٢ صورتها ٣

∴ يجب ان تكون ٥ صورتها ٢٤

∴ ك = ٢٤

② اذا كانت سـ = {١ ، ٣ ، ٥} وكانت ع دالة على سـ وكان بيان ع = {(٣،أ) ،(ب ١٠)، (٥،١)} فأوجد القيمة العددية للمقدار أ+ب

الحـــــل

∵ ع دالة على سـ

∴ يجب أن يكون كل عنصر فى سـ يظهر كمسقط أول مرة واحدة فى بيان ع

∴ أ = ٣ ، ب = ٥ أو أ = ٥ ، ب = ٣

∴ أ+ب = ٣+٥ = ٨

---

③ اذا كان بيان الدالة د = {(١، ٣) ، (٢،٥)، (٣،٧)، (٤،٩)، (٥،١١)}

① اكتب كلا من مجال ومدى الدالة د ② اكتب قاعدة الدالة د

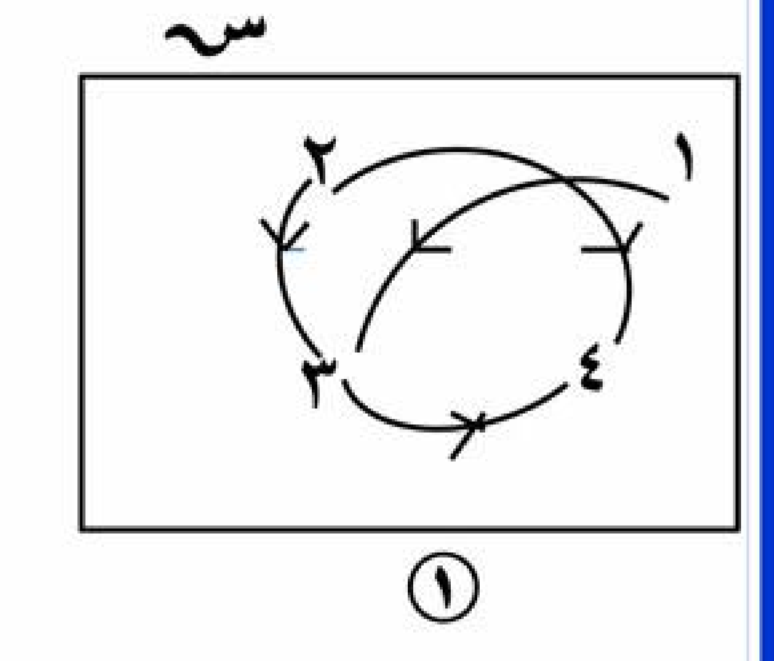
الحـــــل

① المجال = {١، ٢، ٣، ٤، ٥} المدى = {٣، ٥، ٧، ٩، ١١}

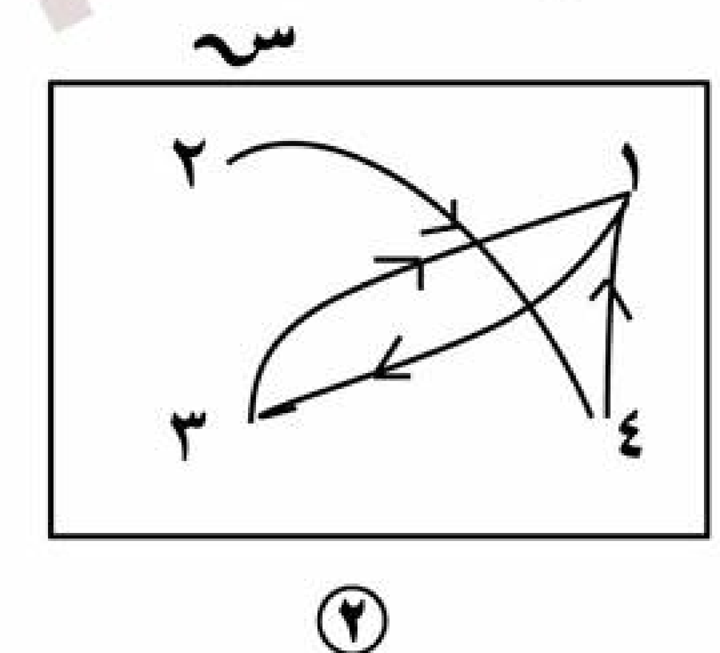
② قاعدة الدالة د(س) = ٢س+١

---

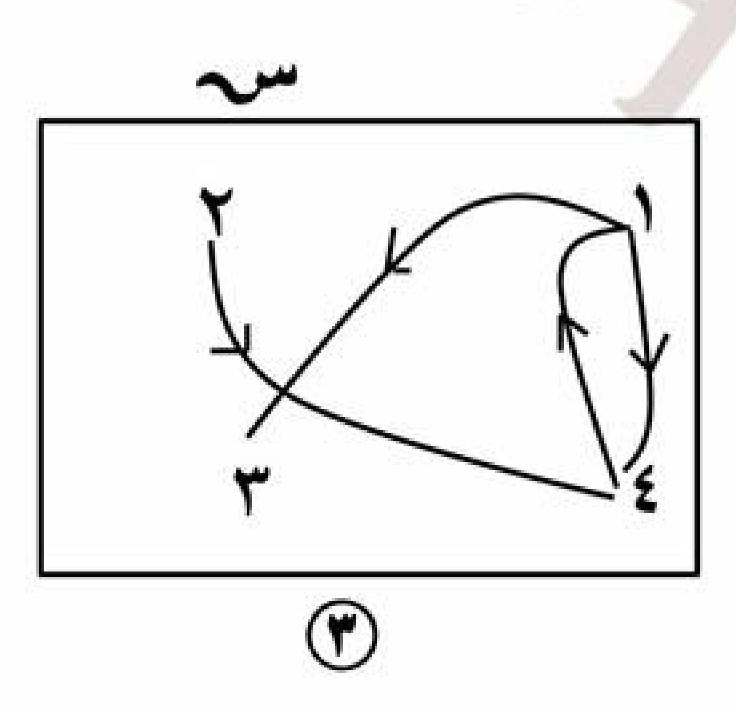
④ اذا كانت سـ = {١، ٢، ٣، ٤} فأى من المخططات التالية تكون دالة على المجموعة سـ



①



②



③

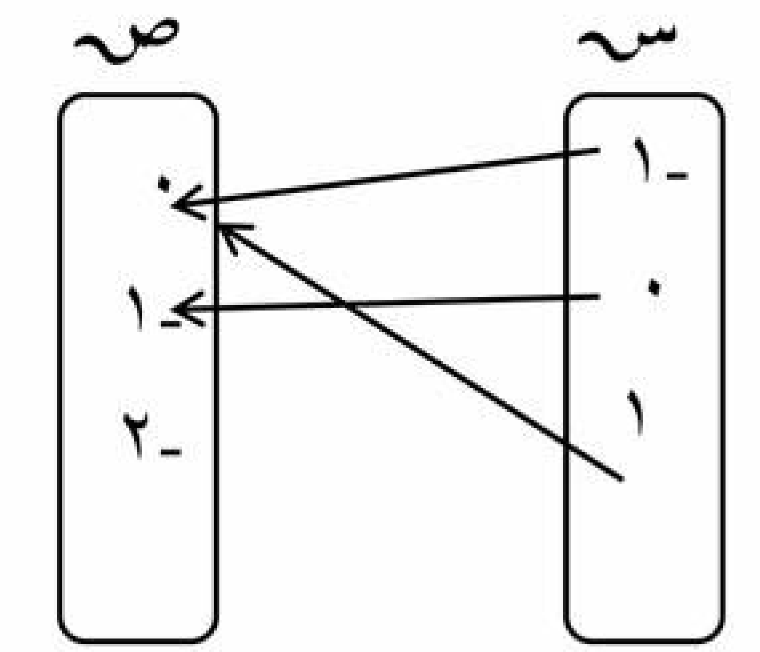
الحـــــل

المخطط رقم ② يمثل دالة

⑤ اذا كانت س = { -١ ، ٠ ، ١ } ، ص = { ٠ ، -١ ، -٢ } **وكانت الدالة** د : س ← ص

حيث د(س) = س^٢ - ١ **أوجد بيان الدالة د ومثلها بمخطط سهمى واكتب مداها**

الحـــل



د(-١) = (-١)^٢ - ١ = ٠

د(٠) = (٠)^٢ - ١ = - ١ د(١) = (١)^٢ - ١ = ٠

∴ **بيان الدالة** = { (-١ ، ٠) ، (٠ ، -١) ، (١ ، ٠) }

مدى الدالة = { ٠ ، -١ }

---

⑥ اذا كانت س = { ٢ ، ٣ ، ٤ } ، ص = { ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ } وكانت د : س ← ص

حيث د (س) = ٩ – س **أوجد صور عناصر س بالدالة** د

الحـــل

د (٣) = ٩-٣ = ٦ ، د (٢) = ٩-٢ = ٧ ، د (٤) = ٩-٤ = ٥

---

⑦ **اذا كانت س = { ٢ ، ٤ ، ٦ } وكانت الدالة د : س ← ح** ، د(س) = ٢س+٣

اوجد مدى الدالة د

الحـــل

مدى الدالة = { ٧ ، ١١ ، ١٥ }

---

⑧ **اذا كان (م ، م) ∈ بيان الدالة د حيث** د(س) = ٢س+٣ **اوجد قيمة م**

الحـــل

٢م + ٣ = م

٢م – م = - ٣ ⇐ م = - ٣

⑨ أكمل ما يلى :

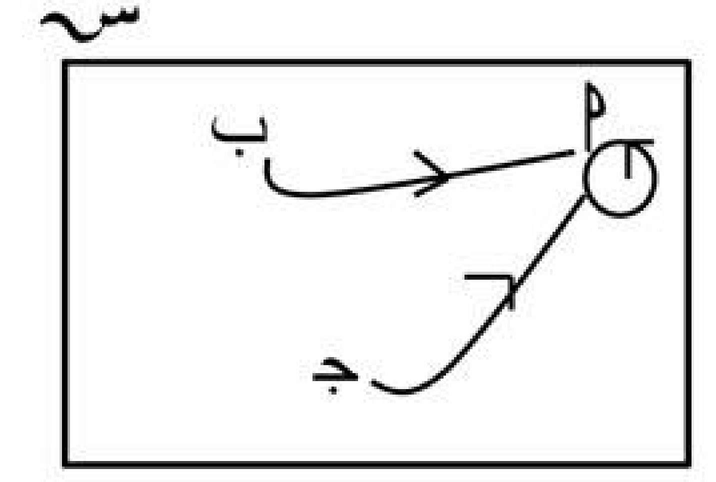
① اذا كانت د دالة حيث د: س ← ص فإن س تسمى ....، ص تسمى .....

② اذا كانت د دالة من المجموعة س الى المجموعة ص فإن مدى الدالة د يكون ⊂ .....

③اذا كانت ع دالة من س الىص حيث س={٢،٥ ، ٨ }، ص={٣ ، ٥}

وكانت ع ={(٢ ، ٣) ، (٥،٣) ، (س ، ٣)}فإن س =.....

④ اذا كانت ع دالة بيانها{(١،٣) ، (٢،٥) ، (٤ ، ٧)}فإن مداها = ...



⑤ الشكل المقابل يمثل دالة على س مداها .....

⑥اذا كانت (م ، ١٣) ∈ بيان الدالة د حيث : د(س) = ٣س +٤ فإن م = ...

⑦ اذا كانت ح مجموعة الاعداد الحقيقية وكانت ع علاقة علىح بحيث (م، ب) ∈ ع وكان م٢ =ب وكانت الازواج الاتية تنتمى الى ع فاكتب الناقص منها :

(١ ، ....) ، (-٥، ....) ، ($\sqrt{٢}$ ، ....)، (.....، ٤) ، (.....، ٧)

الحـــــــل

① س تسمى المجال ،ص تسمى المجال المقابل

② مدى الدالة د يكون ⊂ ص **③ س =٨**

④ مدى الدالة ={٣، ٥ ، ٧} ⑤ مدى الدالة = {م}

⑥ م =٣

⑦ (١ ، ١) ، (-٥ ، ٢٥) ، ($\sqrt{٢}$ ، ٢) ، (±٢ ، ٤) ، (±$\sqrt{٧}$ ، ٧)

⑩ اذا كانت ع دالة من سـ الى صـ حيث أ ع ب تعنى أن " أ تقسم ب" لكل أ $\in$ سـ ، ب $\in$ صـ واذا كان : سـ $\cup$ صـ = {٢، ٣٥، ٩، ١٤، ١١، ٥، ٣} وكان ن(سـ) = ٣، ن(سـ × صـ) = ١٢ اوجد كلا من سـ ، صـ ثم اكتب بيان الدالة ع واوجد مداها ؟

الحـــــــل

$\because$ أ تقسم ب (ب تقبل القسمة على أ بدون باق)

، $\because$ سـ $\cup$ صـ = {٢، ٣٥، ٩، ١٤، ١١، ٥، ٣} ، ع دالة

$\therefore$ ٢ تقسم ١٤ ، ٣ تقسم ٩ ، ٥ تقسم ٣٥

$\because$ ن(سـ) = ٣ $\therefore$ سـ = {٢، ٣، ٥}

$\because$ ن(سـ × صـ) = ١٢ $\therefore$ صـ = {١٤، ٩، ٣٥، ١١}

ع = {(٢، ١٤) ، (٣، ٩) ، (٥، ٣٥)} ومداها = {١٤، ٣٥ ، ٩}

---

⑪ اذا كانت د: سـ $\leftarrow$ صـ ، أ ع ب تعنى أن "أ مضاعف ب" لكل أ $\in$ سـ ، ب $\in$ صـ ، وكان ن(سـ) = ٤ ، ن(صـ) = ٢ ، وكان سـ $\cup$ صـ = {٤، ٨، ٩، ٢٧}

أوجد كلا من سـ ، صـ واكتب بيان الدالة د ثم أوجد المجال المقابل والمدى

الحـــــــل

سـ = {٨، ٢٧ ، ٩ ، ٤}

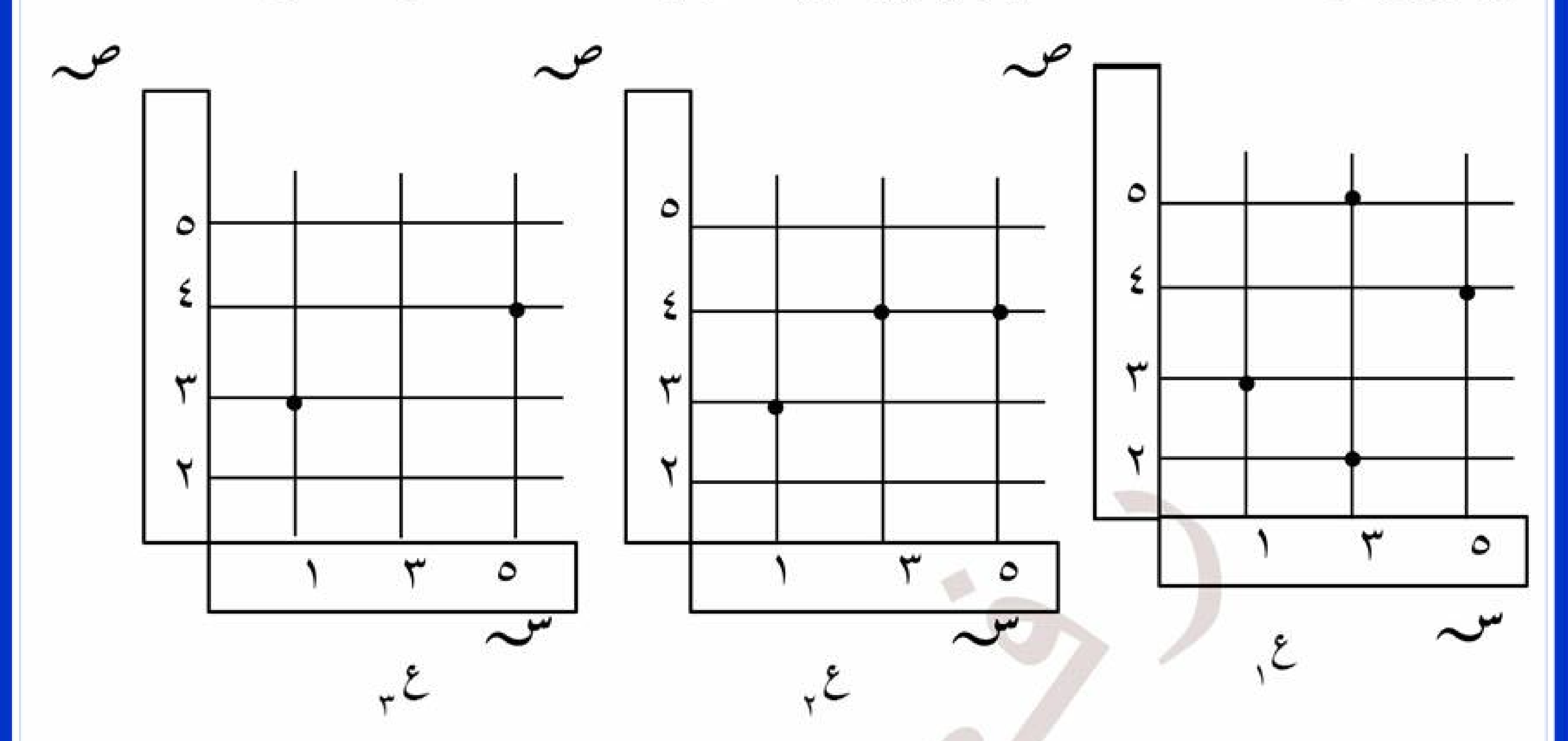
صـ = {٤، ٩}

بيان الدالة = {(٨، ٤)، (٤، ٤)، (٩، ٩)، (٢٧، ٩)}

المجال المقابل = {٩ ، ٤}

المدى = {٩ ، ٤}

⑫ بين أى المخططات الآتية يعبر عن دالة وذا كانت دالة اذكر مداها



الحـــــــــل

ع٢ دالة لأن كل خط رأسى تقع عليه نقطة واحدة فقط ومداها = {٣ ، ٤}

---

⑬ اذا كانت س = {١، ٢ ، ٣ ، ٤} ، ص = {١، ٣ ، ٥ ، ٧} فبين أى العلاقات الآتية تمثل دالة من س الى ص واذا كانت دالة اذكر مداها

ع١ = {(٢،٣)،(١،١)،(٣،٥)،(٣،٧)،(٤،٣)}

ع٢ = {(١،٧)،(٢،٥)،(٤،١)}

ع٣ = {(٢،٣)،(٣،٣)،(١،٥)،(٤،٧)}

الحـــــــــل

ع١ ليست دالة لان العنصر ٣ ظهر كمسقط أول مرتين

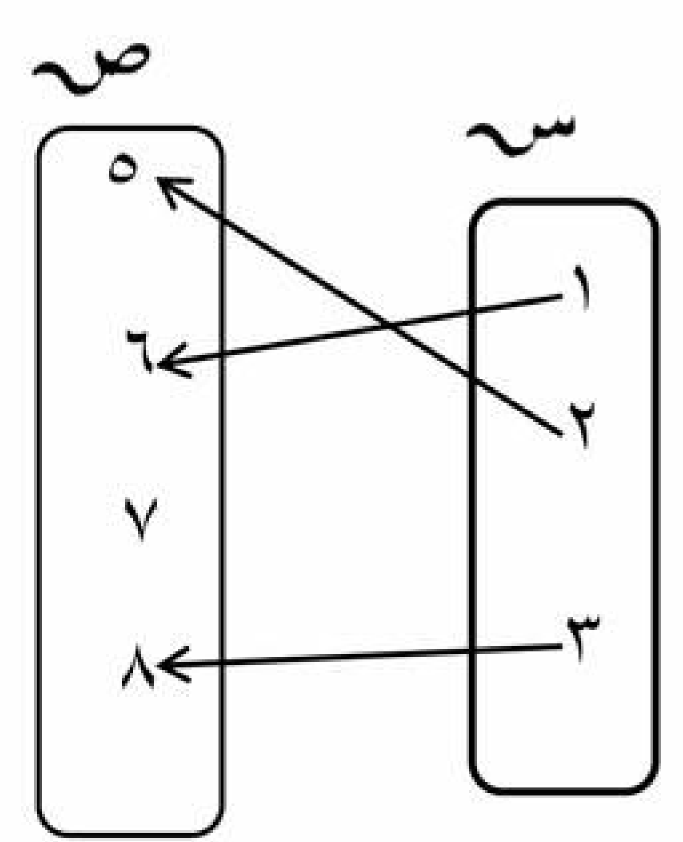
ع٢ ليست دالة لأن العنصر ٣ لم يظهر كمسقط أول فى اى من الأزواج المرتبة التى تمثل العلاقة

ع٣ دالة ، لأن كل عنصر من عناصر س ظهر مرة واحدة فقط كمسقط أول

مدى الدالة = {٣،٥،٧}

⑭ اذا كانت س = {١،٢،٣} ، ص = {٥،٦،٧،٨} وكانت ع علاقة من س الى ص حيث أ ع ب تعنى أن " أ + ب = عددا أوليا " لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص

اكتب بيان ع ، ومثلها بمخطط سهمى ، هل ع دالة أم لا ؟ و لماذا ؟ ، واذا كانت دالة اكتب المدى



الحـــــــــل

بيان ع = {(١،٦)،(٢،٥)،(٣،٨)}

ع دالة لأن كل عنصر من عناصر

س خرج منه سهم واحد فقط الى

احد عناصر ص

المدى = {٦،٥،٨}

---

⑮ اذا كانت س = {−٢، −١، ٠، ١، ٢} ، ص = {٤ ، ٢ ، $\frac{٣}{٢}$ ، ١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٨}$}

و كانت ع علاقة من س الى ص حيث أ ع ب تعنى أن "ب = $٢^{أ}$ " لكل أ ∈ س

، ب ∈ ص اكتب بيان ع ثم اذ كر هل ع دالة ام لا ؟ واذا كانت دالة اكتب المدى

الحـــــــــل

ع = {(−٢ ، $\frac{١}{٤}$) ، (−١ ، $\frac{١}{٢}$) ، (٠ ، ١) ، (١ ، ٢) ، (٢ ، ٤) }

ع دالة لأن كل عنصر من عناصر س ظهر مرة واحد فقط كمسقط أول فى

بيان ع.

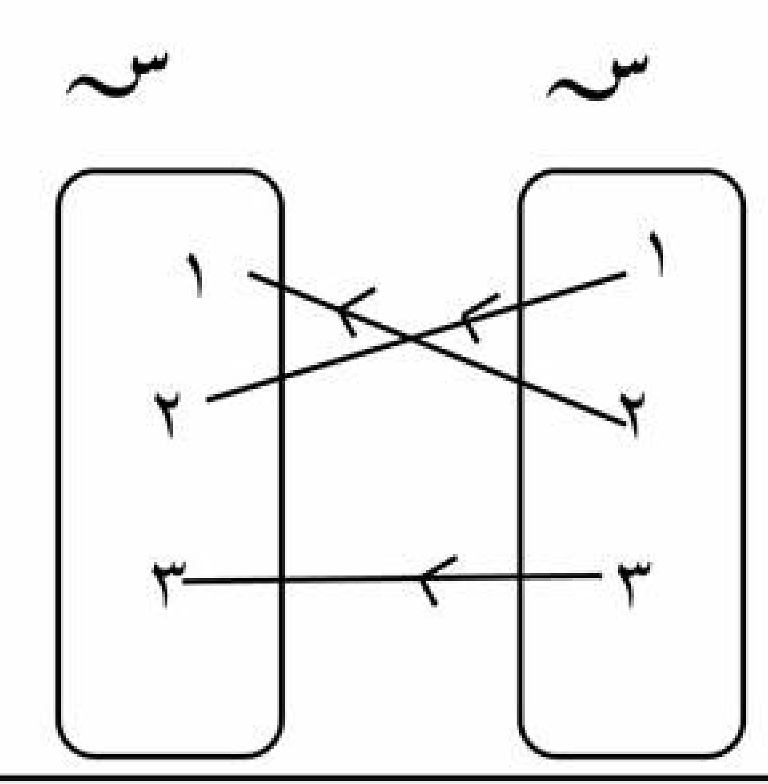
المدى = {١ ، ٢ ، ٤ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ }

⑯ اذا كانت س = {س: س ∋ ط ، ١ ⩽ س ⩽ ٣} وكانت ع علاقة على س حيث

أ ع ب تعنى أن " أ + ب تقبل القسمة على ٣ " لكل أ ∋ س ، ب ∋ س

اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى ثم بين هل ع دالة أم لا

الحـــل



س = {١ ، ٢ ، ٣}

ع = {(١ ،٢) ، (٢ ، ١) ، (٣ ،٣)}

ع **دالة**

---

⑰ اذا كانت س = {١ ،٢ ،٣} ، ص = {ب: ب ∋ ط ، ٣ ⩽ ب < ١٠} وكانت ع علاقة

من س الى ص حيث أ ع ب **تعنى أن "** أ = $\frac{١}{٣}$ ب **" لكل** أ ∋ س ، ب ∋ ص

أكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى ثم بين هل ع دالة أم لا ؟ وان كانت دالة اذكر المدى

الحـــل

ص = {٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩}

بيان = {(١ ،٣) ،(٢ ،٦) ،(٣ ،٩)}

المدى = {٣ ،٦ ،٩}

⑱ اذا كانت س = {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣}، ص = {-٣ ، -٢ ، -١ ، ٠ } وكانت ع علاقة من س الى ص حيث ٩ ع ب تعنى أن " العدد ٩ هو المعكوس الجمعى للعدد ب " لكل ٩ ∈ س ، ب ∈ ص ، اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى هل ع دالة أم لا ولماذا؟

الحـــــل

بيان ع

= {(٠،٠)،(١،-١)،(٢،-٢)،(٣،-٣)}

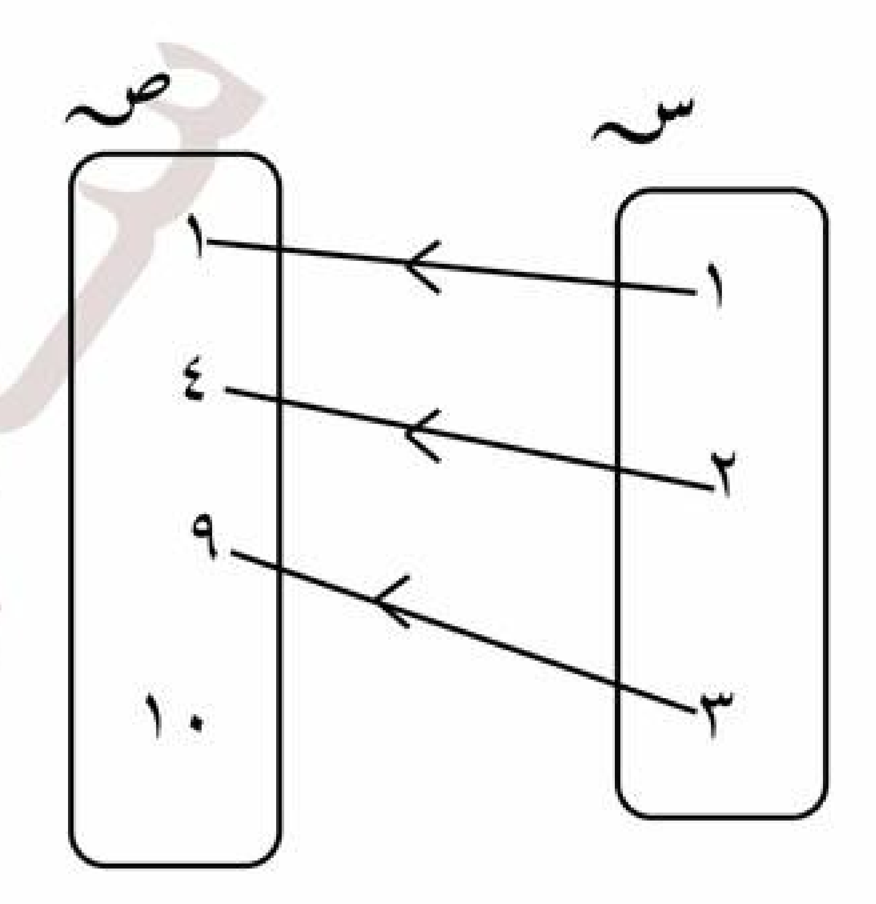
ع دالة لأ ن كل عنصر من عناصر س

خرج منه سهم واحد فقط الى ص

---

⑲ اذا كانت س = {١، ٢، ٣} ، ص = {١، ٤ ، ٩ ، ١٠}، ع علاقة من س الى ص حيث ٩ ع ب تعنى أن " ٩ = √ب " لكل ٩ ∈ س ، ب ∈ ص اكتب بيان ع و مثلها بمخطط سهمى ، ثم بين هل ع دالة أم لا مع ذكر السبب ، وان كانت دالة اذ كر المدى؟

الحـــــل



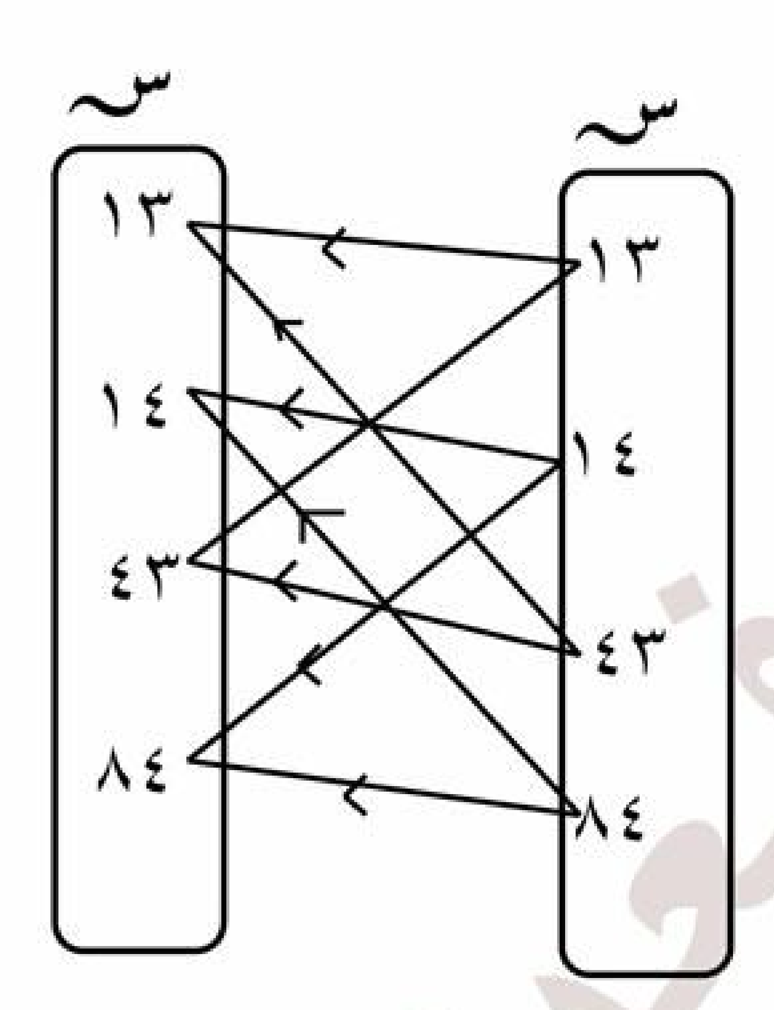
بيان ع = {(١،١)،(٢،٤)،(٣،٩)}

ع دالة لأن كل عنصر من عناصر س ظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط فى أحد الأزواج المرتبة المحددة لبيان العلاقة

المدى = {١،٤،٩}

(٢٠) اذا كانت س = {١٣ ، ١٤ ، ٤٣ ، ٨٤} وكانت ع علاقة على س حيث م ع ب تعنى أن " العدد م له نفس رقم آحاد العدد ب " لكل م ∈ س ، ب ∈ س اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى

الحـــــــل



بيان ع = {(١٣، ١٣) ، (١٣ ، ٤٣) ، (١٤، ١٤) ، (٨٤، ١٤) ، (١٣، ٤٣) ، (٤٣، ٤٣) ، (١٤ ، ٨٤) ، (٨٤، ٨٤)}

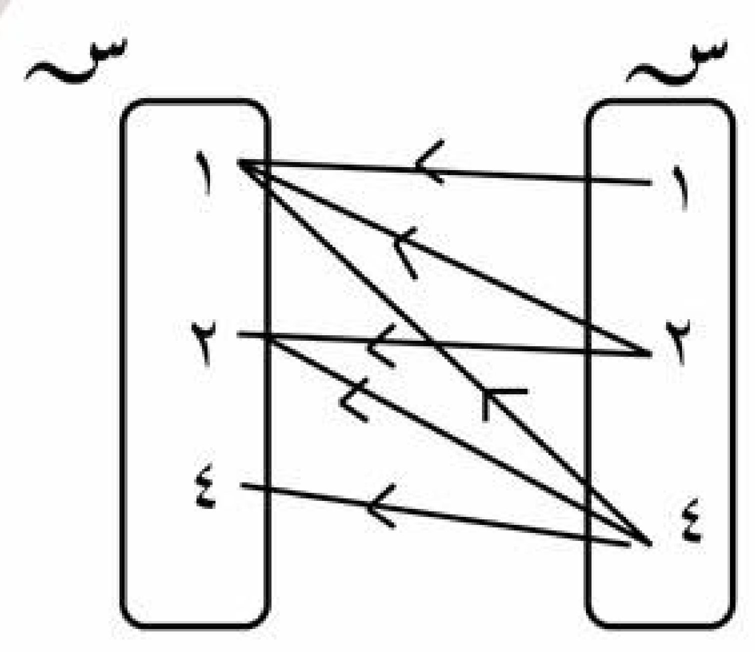
---

(٢١) ا ذا كانت س = {١ ، ٢ ، ٤} وكانت ع علاقة على س حيث م ع ب تعنى أن " م مضاعف ب" لكل م ∈ س ، ب ∈ س اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى

ثم بين هل ع دالة أم لا ؟

الحـــــــل

بيان ع = {(١، ١)، (٢، ١) ، (٢، ٢)، (٤، ١)، (٤، ٢)، (٤، ٤)}



ع ليست دالة لأن العنصر ٢ خرج منه سهمان فى المخطط السهمى

دوال كثيرات الحدود

تعريـــــــف:

الدالة $د : ح \longrightarrow ح$ ، $د(س) = أ_٠ + أ_١ س + أ_٢ س^٢ + \cdots + أ_ن س^ن$

حيث $أ_٠ ، أ_١ ، أ_٢ ، \cdots ، أ_ن \in ح$ ، $ن \in ط$ **تسمى دالة كثيرة حدود**

وتكون درجة الدالة كثيرة الحدود هى أكبر قوة للمتغير فى قاعدة الدالة

أى أن :

الدالة كثيرة الحدود هى دالة قاعدتها حد او مقدار جبرى ويتوفر فيها الشرطان الآتيان :

① **كل من المجال والمجال المقابل للدالة هو مجموعة الاعداد الحقيقية**

② **قوة المتغير س فى اى حد من حدود قاعدتها هو عدد طبيعى**

فمثلا:

$د(س) = ٧ س + ٨$ **دالة كثيرة حدود من الدرجة الاولى**

$ر(س) = س^٢ - ٢س - ١$ **دالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية**

$ن(س) = ٧ - \sqrt{٣} س - ٩ س^٣$ **دالة كثيرة حدود من الدرجة الثالثة**

بينما:

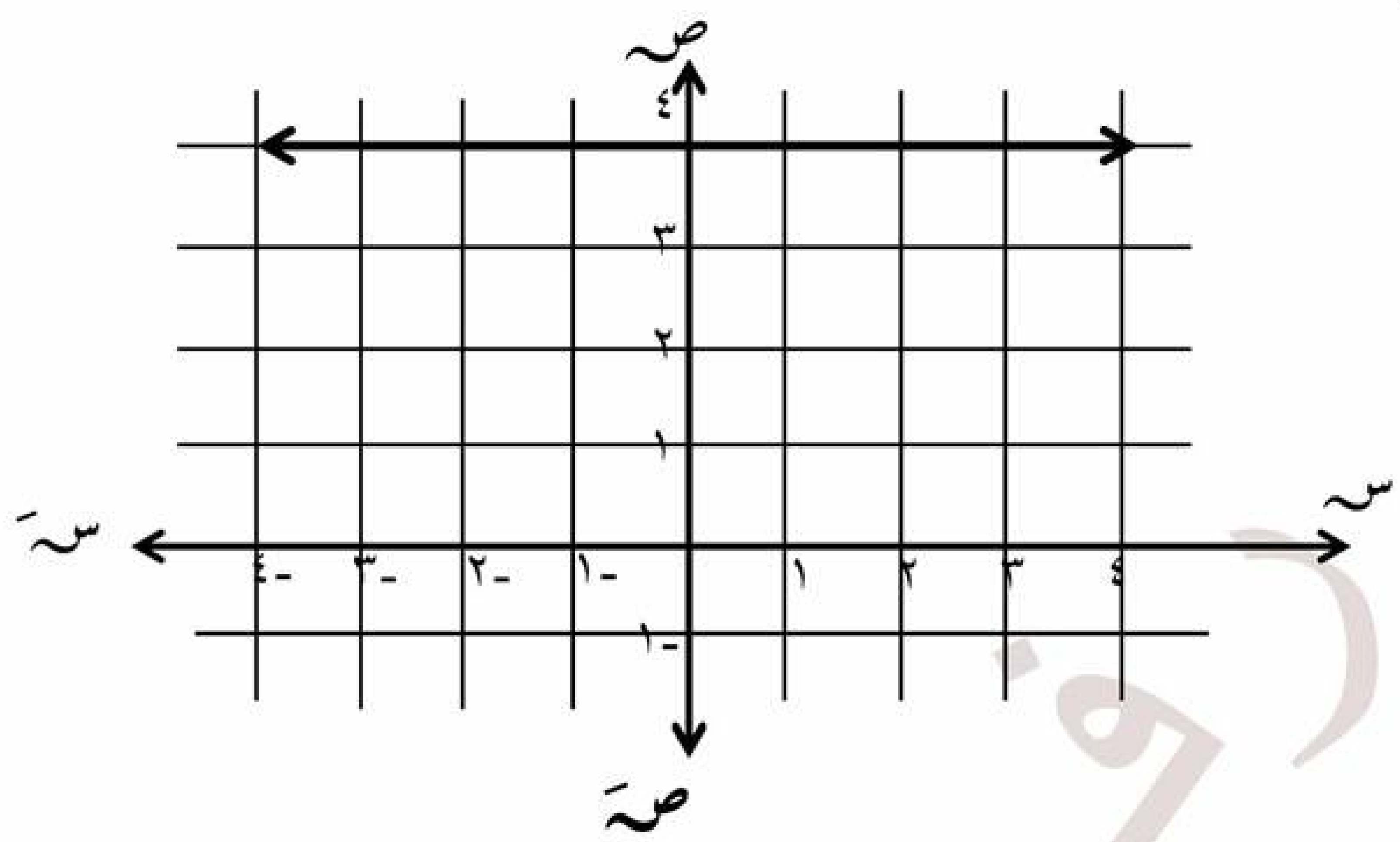
$د_٢(س) = \sqrt{س}$ ، $د_٣(س) = \frac{١}{س}$ ، $د_٤(س) = س(س^٢ + س^{-٢})$ **لا تعد دوال كثيرات حدود**

ملاحظة ①:

الدالة $د : ح \longrightarrow ح$ ، $د(س) = ب$ **حيث** $ب \in ح$ **تسمى دالة ثابتة وهى كثيرة حدود من الدرجة صفر وتمثل بيانيا بخط مستقيم يوازى محور السينات**

فمثلا : د(س) = ٤ دالة ثابتة حيث د(١) = ٤ ، د(٠) = ٤ ، د(-٣) = ٤ ...... وهكذا

وتمثل بيانيا هكذا



ملاحظـــة ②

الدالة د: ح ⟵ ح حيث د(س) = أس+ب ، أ ∈ ح - {٠} ، ب ∈ ح تسمى دالة خطية وهى كثيرة حدود من الدرجة الاولى وتمثل بيانيا بخط مستقيم يقطع محور السينات فى النقطة

($\frac{-ب}{أ}$ ، ٠) ومحور الصادات فى النقطة (٠ ، ب)

مثال : مثل بيانيا د(س)=٣س-١ وأوجد نقط التقاطع مع محورى الاحداثيات

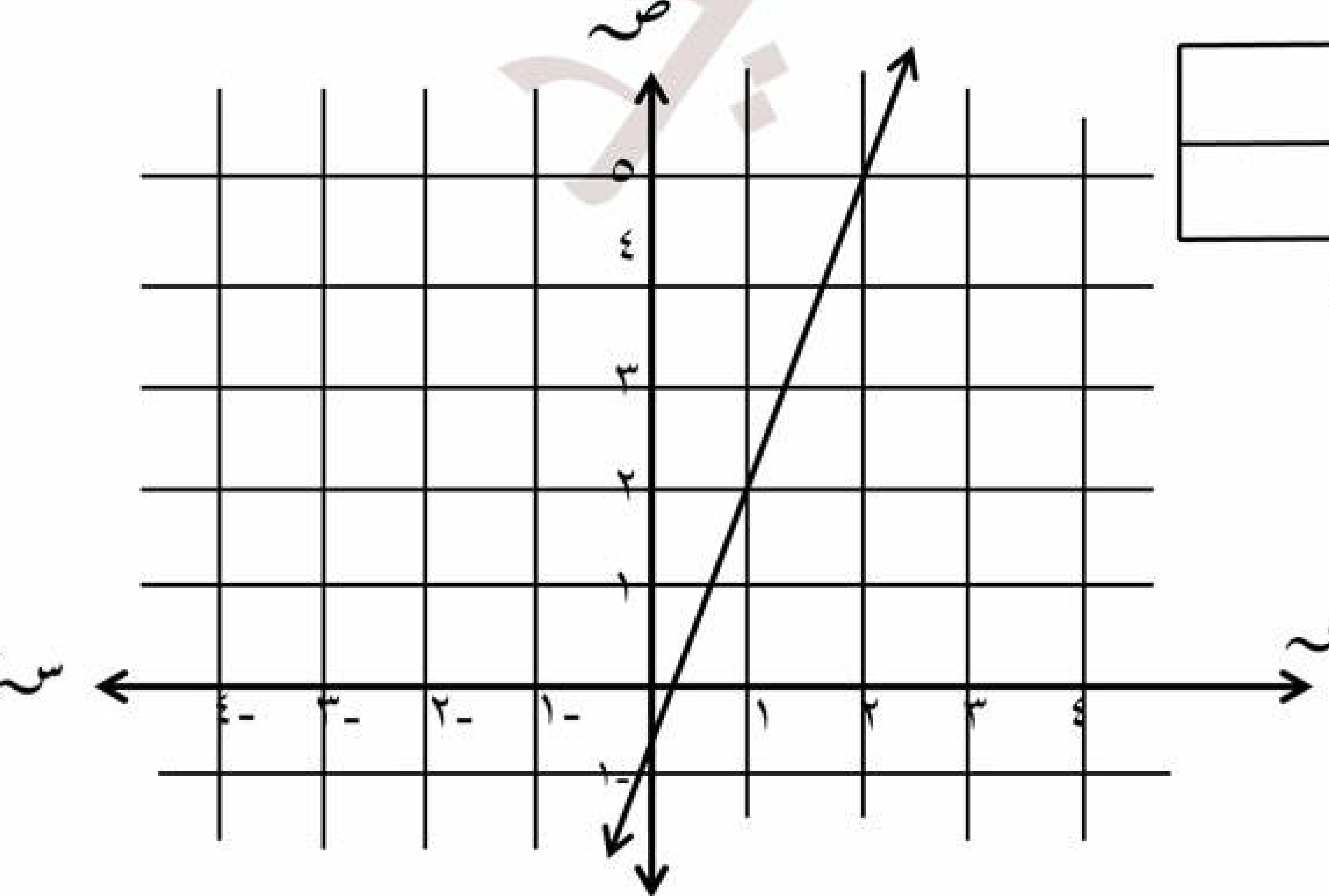
الحـــــل

س	صفر	١	٢
ص	-١	٢	٥

يقطع محور السينات فى النقطة

($\frac{١}{٣}$ ، ٠)

ويقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، -١)



ملاحظة ③

عند بحث ما اذا كانت دالة تمثل دالة كثيرة حدود ام لا فاننا لا نقوم بتبسيط قاعدتها

فمثلا الدالة د(س) = س$\left(س+\frac{1}{س}\right)$ لا تمثل كثيرة حدود ، بينما الدالة ر(س)=س^{2}+1 كثيرة حدود

ملاحظة ④

عند بحث درجة الدالة يجب تبسيط قاعدتها الى ابسط صورة قبل تعيين درجتها

فمثلا :الدالة د(س)=س^{2}(س+2)^{2} من الدرجة الرابعة

لأن س^{2}(س+2)^{2} =س^{2}(س^{2}+4س+4)=س^{4}+4س^{3}+4س^{2}

تماريـــــــن محلولة

① اذا كانت د (س) =س^{2} - 2س - 5 أثبت أن : د(1+$\sqrt{6}$) = د(1 - $\sqrt{6}$)

الحـــل

د(1+$\sqrt{6}$)=(1+$\sqrt{6}$)^{2} - 2(1+$\sqrt{6}$) -5

=1+2$\sqrt{6}$+6-2-2$\sqrt{6}$ -5=صفر

د(1-$\sqrt{6}$)=(1-$\sqrt{6}$)^{2} - 2(1-$\sqrt{6}$) -5

=1-2$\sqrt{6}$ +6-2+2$\sqrt{6}$ -5=صفر

$\therefore$ د(1+$\sqrt{6}$)=د(1-$\sqrt{6}$)

---

② اذا كانت د(س)=2س^{2} -5س+2 أثبت أن : د(2)=د$\left(\frac{1}{2}\right)$

الحـــل

د(2)=2(2)^{2} -5(2)+2=صفر

د$\left(\frac{1}{2}\right)$=2$\left(\frac{1}{2}\right)^{2}-5\left(\frac{1}{2}\right)$+2=صفر

$\therefore$د(2)=د$\left(\frac{1}{2}\right)$

③ **اذا كانت د(س) = س^{٢} − ٣س ، ر(س) = س − ٣**

Ⓐ **أوجد د(√٢) + ٣ر(√٢)**

Ⓑ **اثبت أن : د(٣) = ر(٣)**

الحـــــل

Ⓐ **د(√٢) + ٣ر(√٢) = (√٢)^{٢} − ٣(√٢) + ٣(√٢) − ٩**

= ٢ − ٣√٢ + ٣√٢ − ٩ = −٧

Ⓑ د(٣) = (٣)^{٢} − ٣(٣) = ٩ − ٩ = **صفر**

ر(٣) = ٣ − ٣ = **صفر**

∴ **د(٣) = ر(٣)**

---

④ **اذا كانت** د(س) = ٢س + ب ، ر(س) = س^{٢} + ب

وكان د(٢) + ر(−٤) = ٣٠ **أوجد** د(−٢) − ر(٢)

الحـــــل

د(٢) = ٢(٢) + ب = ٤ + ب

ر(−٤) = (−٤)^{٢} + ب = ١٦ + ب

∵ د(٢) + ر(−٤) = ٣٠

∴ ٤ + ب + ١٦ + ب = ٣٠ ⟸ ب = ٥

∴ د(−٢) − ر(٢) = ٢(−٢) + ٥ − [(٢)^{٢} + ٥] = −١ − [٩] = −٨

---

⑤ **اذا كانت** د(س) = ٢س^{٢} + ب س + جـ ، **وكانت** د(س) = ٠ **عندما س** ∈ {٠، ٣}

فأوجد قيمة كلا من ب ، جـ

الحـــــل

∵ د(٠) = ٠ ∴ ٢ × (٠)^{٢} + ب × ٠ + جـ = ٠ ⟸ جـ = **صفر**

∴ د(س) = ٢س^{٢} + ب س

∵ د(٣)=٠ ⟸ ٢(٣)^{٢}+٣ب=٠

∴ ب=-٦

---

⑥ أكمل ما يلى :

① اذا كان المستقيم الممثل للدالة د: ح ← ح حيث د(س)=٥س-أ يقطع محور الصادات فى النقطة (ب ، ٢) فإن أ= ..... ، ب= .....

② اذا كانت د(س)=س-٥ وكان $\frac{١}{٢}$ د(أ)=٣ فإن أ= ......

③ اذا كانت د(س)=٤س+ب ، د(٣)= ١٥ فإن ب = ...

④ اذا كانت الدالة د حيث د(س)=٥س+٤ يمثلها بيانيا خط مستقيم يمر بالنقطة (٣، ب) فإن ب = ...

⑤ الدالة الخطية المعرفة بالقاعدة ص= ٣ س+٦ يمثلها بيانيا خط مستقيم يقطع محور السينات فى النقطة ......

⑥ الدالة د: ح ← ح حيث د(س)=٣س يمثلها خط مستقيم يمر بالنقطة (-٤ ، .....)

⑦ الدالة د: د(س)=س^{٢}-(س^{٢}-٣) دالة كثيرة حدود من الدرجة ....

⑧ اذا كانت (-٢ ، ص) تنتمى لمنحنى الدالة د : د(س)=س^{٢}+١ فإن ص = ...

⑨ اذا كان د(س)=س^{ب} وكانت د(٣)= ٨١ فإن ب = ...

⑩ اذا كان منحنى الدالة د: ح ← ح حيث د(س)=م-س^{٢} يقطع محور السينات فى النقطة (-٢ ، ب) فإن م^{ب}+٢م= ......

⑪ اذا كانت النقطة (أ ، ٣) تقع على الخط المستقيم الممثل للدالة د: ح ← ح حيث د(س)=٤س-٥ فإن أ= ......

الحـــــــل

① أ = -٢ ، ب = صفر ② أ = ١١ ③ ب = ٣

④ ب = ١٩ ⑤ النقطة (-٢ ، ٠) ⑥ (-٤ ، -١٢)

⑦ الدرجة صفر ⑧ ص = ٥ ⑨ ب = ٤

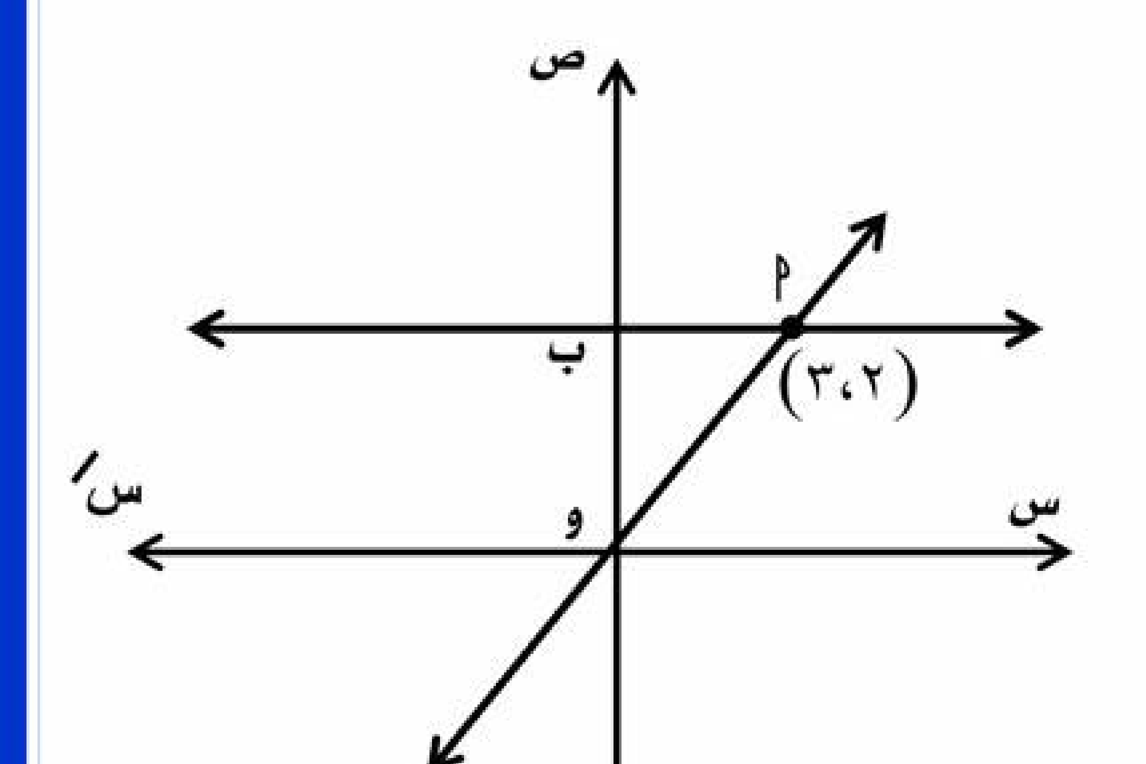
⑩ ٩ ⑪ أ = ٢

---

⑦ في الشكل المقابل :

الدالة الثابتة د تمثل بيانيا بالمستقيم $\overleftrightarrow{\text{ب أ}}$

والدالة الخطية ر تمثل بيانيا بالمستقيم $\overleftrightarrow{\text{و أ}}$ حيث أ (٢ ، ٣)



① اكتب قاعدة الدالة د وقاعدة الدالة ر

② أوجد قيمة د (-١٠) + ر (٦)

الحـــــــل

∵ د دالة ثابتة تمثل بخط مستقيم يوازي محور السينات وتمر بالنقطة أ (٢، ٣)

∴ قاعدة الدالة د هي : د(س) = ٣

∵ ر دالة خطية تمر بالنقطتين أ (٢ ، ٣) ، و (٠ ، ٠)

∴ قاعدة الدالة ر هي ر (س) = ب س + جـ

٠ = ب × ٠ + جـ

∴ جـ = صفر ∴ ر (س) = ب س

∵ (٢، ٣) ∈ للمستقيم $\overleftrightarrow{\text{و أ}}$ ∴ ٣ = ب × ٢

∴ ب = $\frac{٣}{٢}$ ∴ ر (س) = $\frac{٣}{٢}$ س

∴ د (-١٠) + ر (٦) = ٣ + $\frac{٣}{٢}$ × ٦ = ١٢

الدالة التربيعية

الدالة د: ح ← ح حيث د(س) = أس^2 + ب س + جـ ، أ ، ب ، جـ ∈ ح ، أ ≠ صفر

تسمى دالة تربيعية وهى كثيرة حدود من الدرجة الثانية

ملاحظـــــات

① اذا كان معامل س^2 موجبا فإن المنحنى يكون مفتوحا لأعلى ويكون للدالة نقطة قيمة صغرى ، واذا كان معامل س^2 سالبا فإن المنحنى يكون مفتوحا لأسفل ويكون للدالة نقطة قيمة عظمى

② رأس المنحنى = $\left(\frac{-ب}{2أ} ، د\left(\frac{-ب}{2أ}\right)\right)$

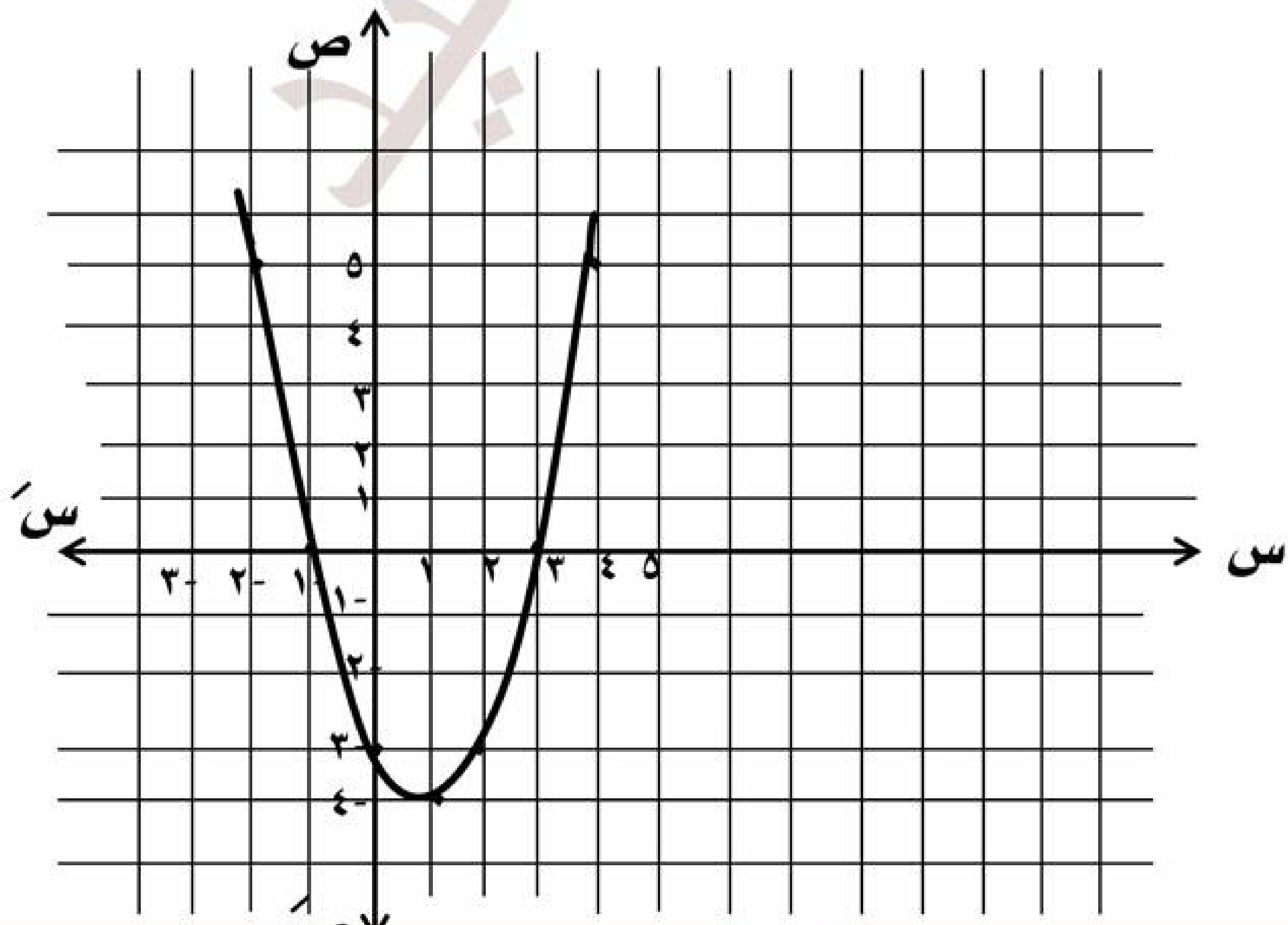
③ معادلة محور التماثل : س = الاحداثى السينى لنقطة رأس المنحنى

④ القيمة الصغرى أو العظمى = الاحداثى الصادى لرأس المنحنى

تماريـــــن محلولة

① ارسم الشكل البيانى للدالة د(س) = س^2 − ٢س − ٣ متخذا س ∈ [−٢ ، ٤]

ومن الرسم أوجد نقطة رأس المنحنى ومعادلة محور التماثل والقيمة الصغرى للدالة



س	-٢	-١	صفر	١	٢	٣	٤
ص	٥	صفر	-٣	-٤	-٣	صفر	٥

من الرسم نجد أن :

نقطة رأس المنحنى (١، -٤)

معادلة محور التماثل س= ١

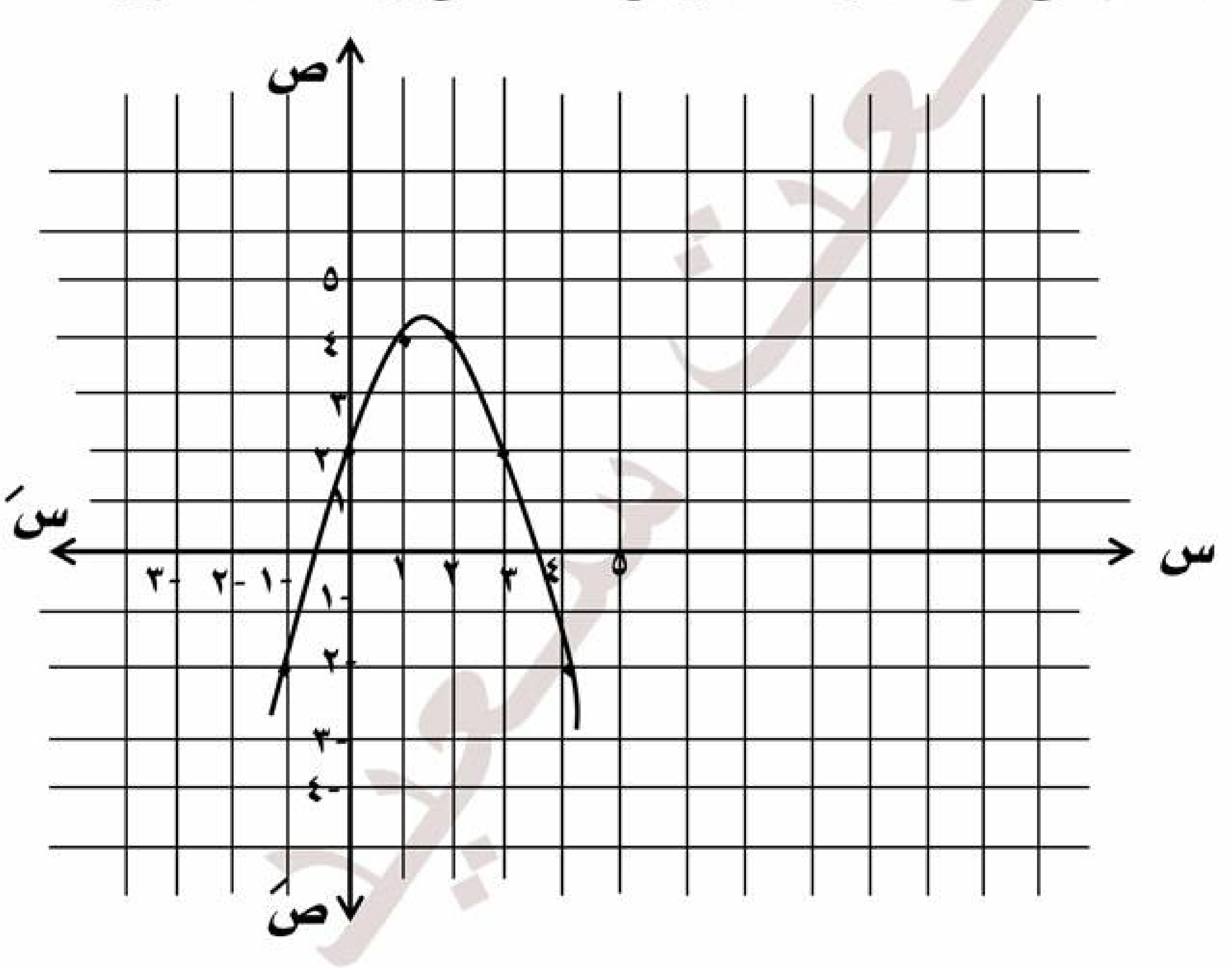
القيمة الصغرى للدالة = -٤

---

②ارسم الشكل البيانى للدالة د:د(س)=-س^{٢}+٣س+٢ متخذا س ∋[-١،٤]

وأوجد القيمة العظمى للدالة ونقطة رأس المنحنى ومعادلة محور التماثل

الحـــــل



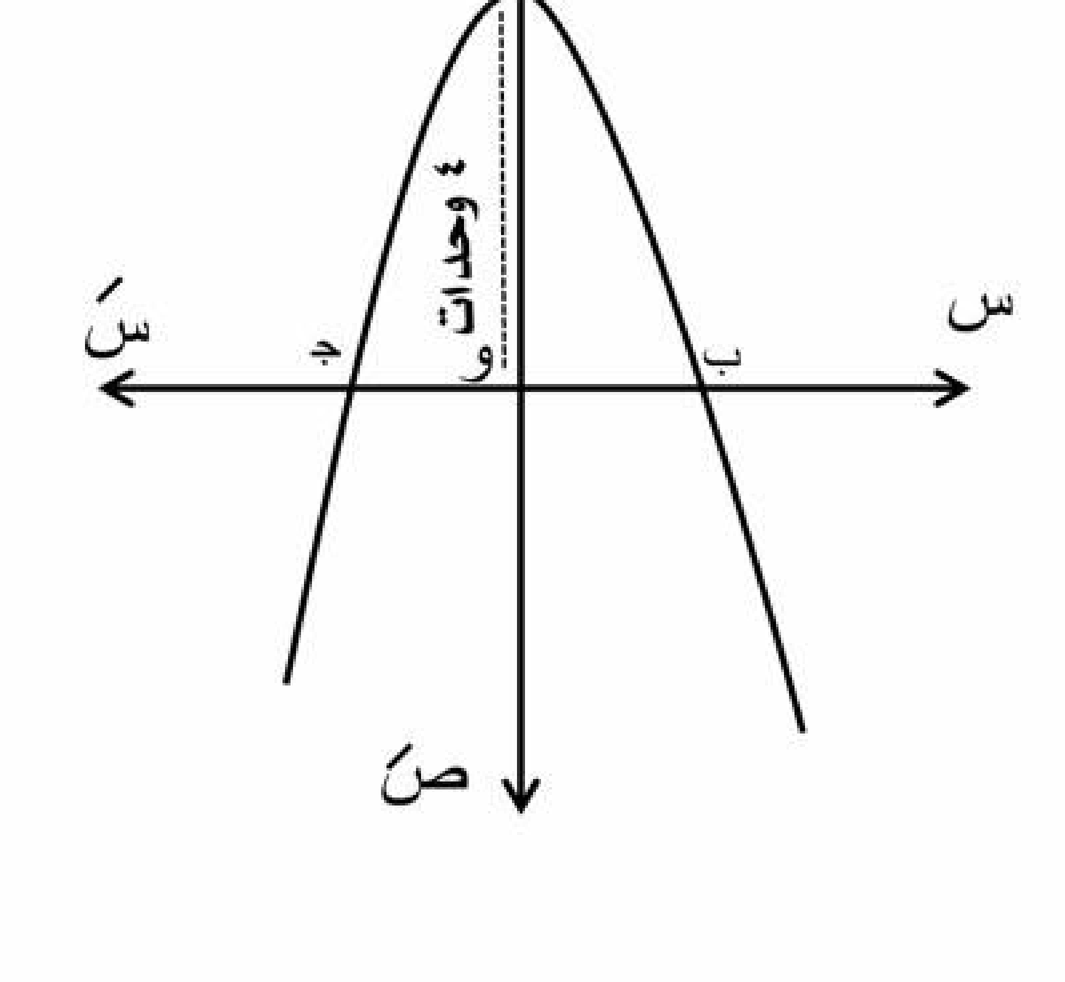
س	-١	٠	١	٢	٣	٤
ص	-٢	٢	٤	٤	٢	-٢

نقطة رأس المنحنى =($\frac{-ب}{٢أ}$ ، د($\frac{-ب}{٢أ}$))=($\frac{٣}{٢}$ ، ٤$\frac{١}{٤}$)

القيمة العظمى للدالة = ٤$\frac{١}{٤}$

معادلة محور التماثل س= $\frac{٣}{٢}$

③ **الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د حيث : د(س) = م − س^{٢}**



اذا كان أو = ٤ وحدات أوجد :

① **قيمة م**

② **احداثيى ب ، جـ**

③ **مساحة المثلث الذى رءوسه أ، ب ، جـ**



الحـــــل

∵ أو = ٤ وحدات ∴ نقطة أ = (٠ ، ٤)

∵ نقطة أ تحقق معادلة المنحنى

∴ ٤ = م − (٠)^{٢} ⟸ م = ٤

∵ منحنى الدالة يقطع محور السينات فى النقطتين ب ، جـ

∴ ٠ = ٤ − س^{٢} ⟸ س^{٢} = ٤

∴ س = ٢ أو −٢

ب = (٢ ، ٠) ، جـ = (−٢ ، ٠)

∴ ب جـ = ٤ وحدات

مساحة △ أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٤ = ٨ وحدات مربعة

---

④ **اذا كان د(س) = ك س^{٢} + (٣ك + ٢) س + ٦ وكان الاحداثى السينى لرأس منحنى الدالة د: د(س) يساوى −٢ أوجد قيمة ك**

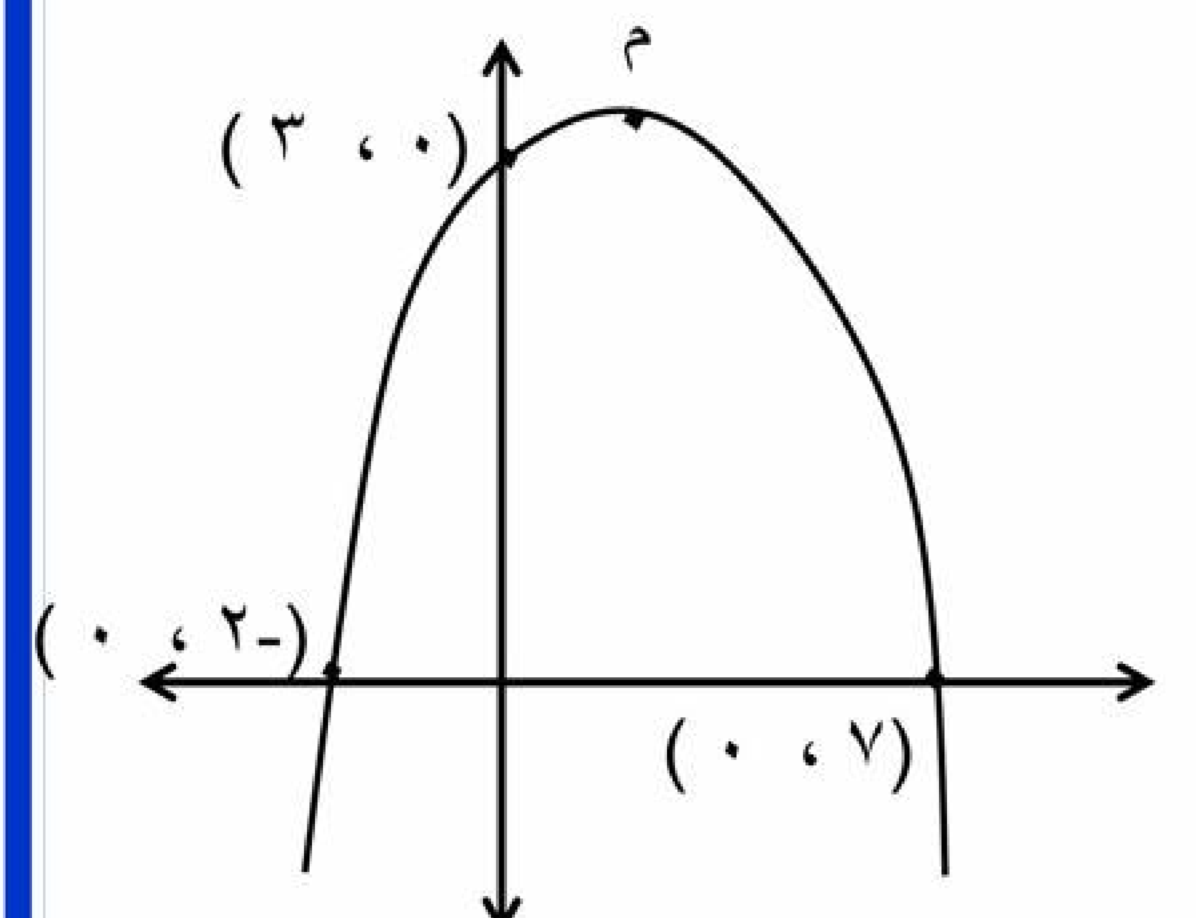
الحـــــل

الاحداثى السينى لرأس المنحى = $\frac{-ب}{٢أ}$

−٢ = $\frac{-٣ك - ٢}{٢ك}$ ⟸ ك = ٢

⑤ **اذا كان د(س)= أ$س^2$ + ب س + جـ وكانت النقطة م هى نقطة رأس المنحنى**

أوجد د(٥)



الحـــــــــل

∵ **النقطة (٠ ، ٣) تحقق المنحنى**

∴ ٣ = ٠ + ٠ + جـ

جـ = ٣

∵ د(- ٢) = د (٧)

$(-٢)^2$ أ + (-٢) ب + ٣ = $(٧)^2$ أ + ٧ب + ٣

٩ب = -٤٥ أ

ب = -٥ أ

د(٥) = $(٥)^2$ أ + ٥ ب + ٣ = ٢٥ أ + ٥ب + ٣

بالتعويض عن ب

د(٥) = ٢٥ أ + ٥(-٥ أ) + ٣ = ٢٥ أ - ٢٥ أ + ٣ = ٣

∴ د(٥) = ٣

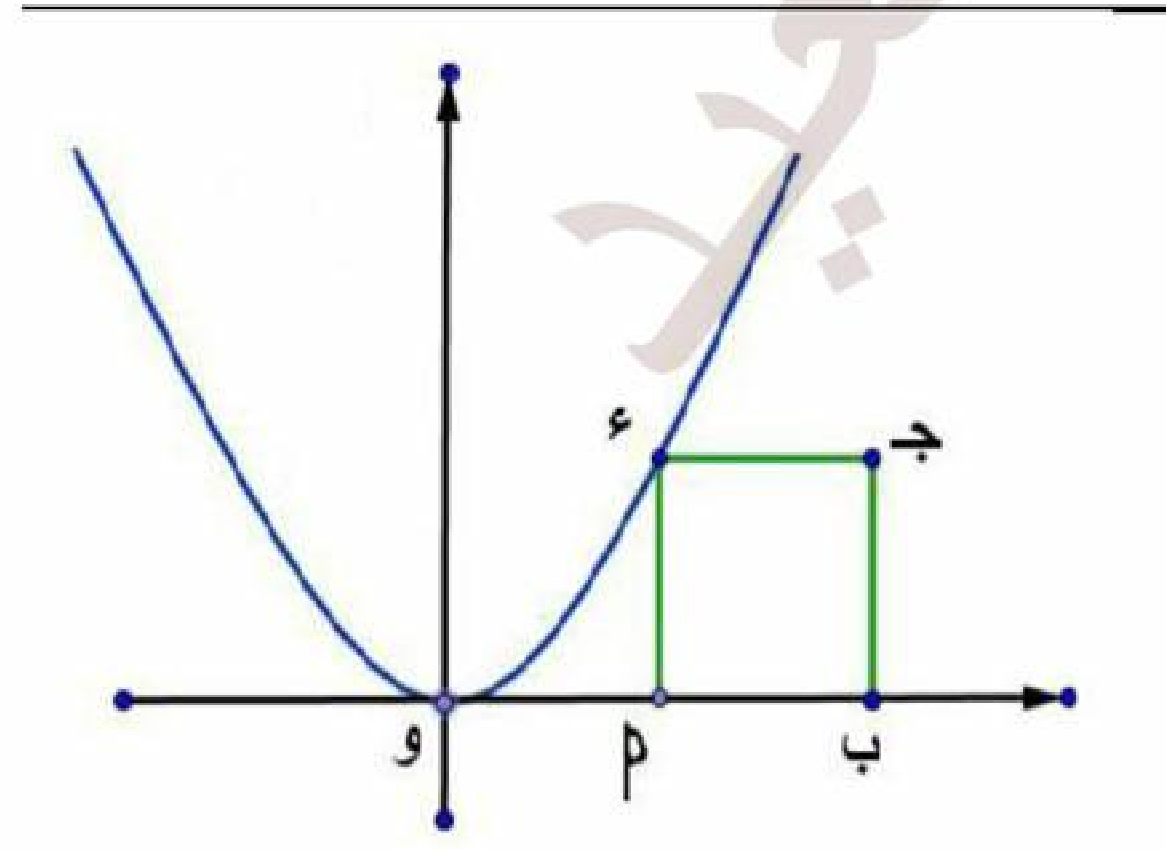
---

⑥ **اذا كان د**(س) = $س^2$

وكان أ ب جـ ء مربع حيث

ب(٦ ، صفر)

أوجد مساحة المربع أ ب جـ ء



الحـــــــــل

نفرض أن أب = ل ∴ و أ = ٦ - ل

احداثى نقطة ء = (٦ - ل ، ل) **وهى تحقق المنحنى**

∴ $(٦ - ل)^2$ = ل

٣٦ - ١٢ل+ل^{٢}=ل

ل^{٢} - ١٣ل+٣٦=٠

(ل-٤)(ل - ٩)=٠

ل =٩ (مرفوض لأن طول و م يصبح سالبا)

∴ ل= ٤ ∴ طول ضلع المربع = ٤ سم

∴ مساحة المربع = ١٦ سم^{٢}

---

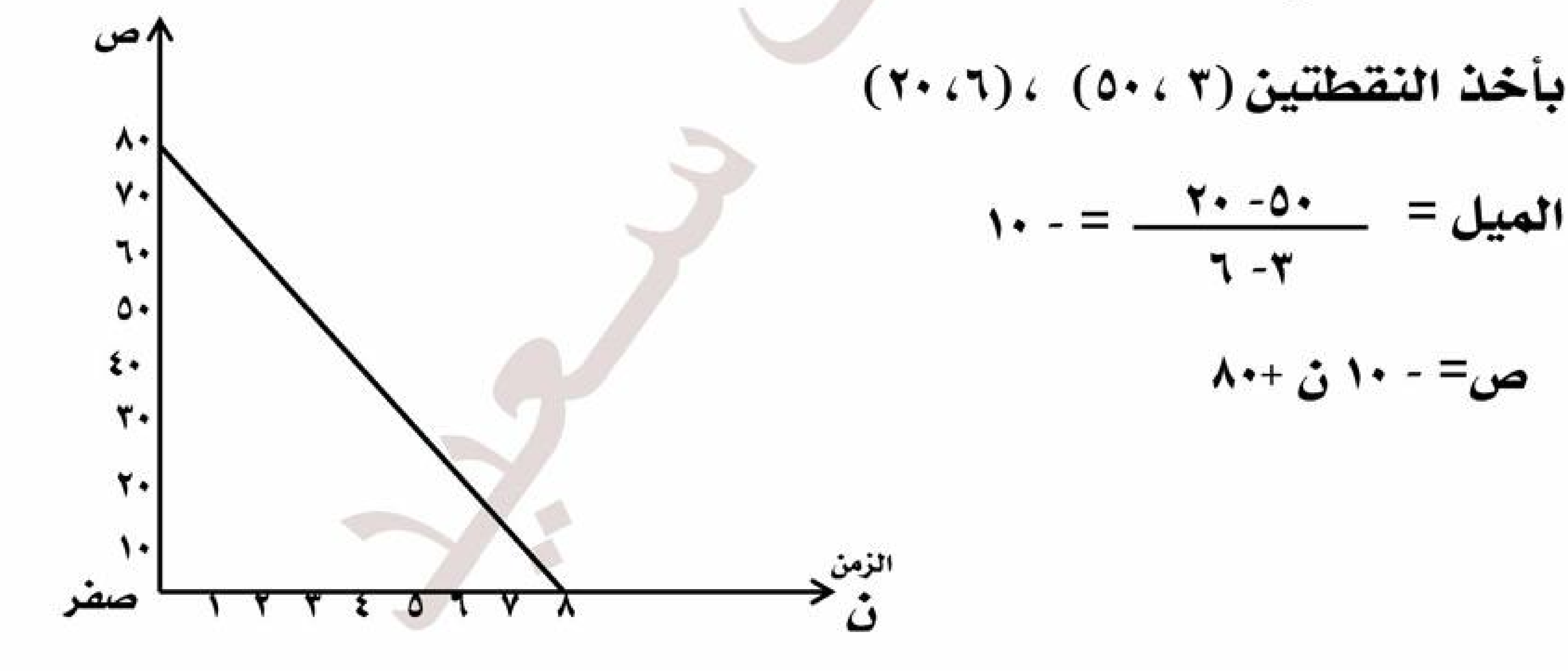
⑦ أثناء قراءة كريم لكتاب وجد أنه بعد ٣ ساعات تبقى له٥٠ صفحة و بعد ٦ ساعات تبقى له ٢٠ صفحة فإذا كانت العلاقة بين الزمن (ن) وعدد الصفحات (ص) هى علاقة خطية :

① مثل العلاقة بين ن ، ص بيانيا ثم أوجد العلاقة الجبرية بينهما

② ما الوقت الذى ينتهى فيه كريم من قراءة الكتاب ؟

③كم عدد صفحات الكتاب المتبقية عندما بدأ كريم القراءة ؟

الحـــــل



بأخذ النقطتين (٣ ، ٥٠) ، (٦، ٢٠)

الميل = $\frac{٥٠ - ٢٠}{٣ - ٦}$ = - ١٠

ص= - ١٠ ن +٨٠

② الوقت الذى ينتهى فيه كريم من قراءة الكتاب

بعد ٨ ساعات

③ عدد صفحات الكتاب المتبقية عندما بدأ كريم القراءة

٨٠ صفحة

⑧ اذا كانت النقطة (-١ ، ٢) هى نقطة رأس منحنى الدالة

د(س) = أس^٢ - ٦س + جـ أوجد قيمة جـ

الحل

الاحداثى السينى لرأس المنحنى = $\frac{-ب}{٢أ}$

$\frac{٦}{٢أ}$ = -١ ⟸ أ = -٣

∴ د(س) = -٣س^٢ - ٦س + جـ

∴ (-٣)(-١)^٢ - ٦(-١) + جـ = ٢

جـ = -١

---

⑨ اذا كان د(س) = س^٢ - أس + ب وكانت النقطة م(١ ، ٤) هى نقطة رأس المنحنى أوجد قيمة أ ، ب

الحل

الاحداثى السينى لرأس المنحنى = $\frac{-ب}{٢أ}$

$\frac{أ}{٢}$ = ١ ⟸ أ = ٢

د(س) = س^٢ - ٢س + ب

∵ النقطة (١ ، ٤) تحقق الدالة

∴ ١ - ٢ + ب = ٤ ⟸ ب = ٥

---

⑩ أكمل ما يلى :

① معادلة محور التماثل لمنحنى د(س) = س^٢ - ٩ هى .....
② نقطة رأس منحنى الدالة د(س) = ٢س^٢ - ٤س + ٥ هى .....

الحل ① س = صفر

② (١ ، ٣)

النسبـــــــة

تعريـــــف:النسبة هى مقارنة بين كميتين وعموما اذا كان ٩، ب عددين حقيقيين فإن النسبة بين ٩ و ب تكتب ٩:ب أو $\frac{٩}{ب}$ وتقرأ ٩ إلى ب حيث يسمى ٩ مقدم النسبة ويسمى ب تالى النسبة ، ويسمى ٩، ب معا حدى النسبة

ملا حظـــات

① **النسبة لا تتغير اذا ضرب حداها (او قسما) على عدد حقيقى لا يساوى صفر**

② **النسبة تتغير اذا أضيف الى حديها أو طرح منهما عدد حقيقى لا يساوى صفر**

③ **اذا كان** $\frac{٩}{ب} = \frac{جـ}{د}$ **فإن** ٩×د=ب×جـ

④ **اذا كان** ٩×د=ب×جـ **فإن** $\frac{٩}{ب} = \frac{جـ}{د}$

⑤ **اذا كان** $\frac{٩}{ب} = \frac{جـ}{د}$ **فإن** $\frac{٩}{جـ} = \frac{ب}{د}$

⑥ **اذا كان** $\frac{٩}{ب} = \frac{جـ}{د}$ **فإن ٩ =جـ م ، ب = د م حيث م ثابت لايساوى صفر**

تماريـــــــــن محلولة□

① **أوجد العدد الذى اذا أضيف الى حدى النسبة** $\frac{٢}{٧}$ **لتصبح** $\frac{١}{٢}$

الحـــل

نفرض أن العدد هو س

$$\frac{٢+س}{٧+س} = \frac{١}{٢}$$

٤ + ٢س = ٧ + س

٢س − س = ٧ − ٤

س = ٣ ∴ العدد هو ٣

---

② اذا كانت النسبة بين بعدى مستطيل هى ٢ : ٣ وكان محيط المستطيل ٦٠ سم أوجد بعدى المستطيل ومساحته

الحـــــــل

نفرض أن بعدا المستطيل ٢ م ، ٣م

∵ محيط المستطيل = (الطول + العرض) × ٢

٢ (٥ م) = ٦٠ ⟸ م = ٦

∴ بعدا المستطيل هما ١٢ ، ١٨

∴ مساحة المستطيل = ١٢ × ١٨ = ٢١٦ سم٢

---

③ مثلث النسبة بين طول قاعدته وارتفاعه ٣ : ٢ ومساحته ٤٨ سم٢ أوجد طول قاعدته وارتفاعه

الحـــــــل

نفرض ان طول قاعدته ٣م ، وارتفاعه ٢م

∵ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ طول القاعدة × الارتفاع

∴ $\frac{١}{٢}$ × ٣م × ٢م = ٤٨ ⟸ م٢ = ١٦

م = ٤ ∴ طول القاعدة = ١٢ سم ، الارتفاع = ٨ سم

---

④ أوجد العدد الموجب الذى اذا أضيف معكوسه الضربى إلى تالى النسبة $\frac{٢}{٣}$ أصبحت $\frac{٣}{٥}$

الحـــــــل

نفرض أن العدد س ∴ معكوسه الضربى = $\frac{١}{س}$

$$\frac{٢}{٣ + \frac{١}{س}} = \frac{٣}{٥}$$

$$\frac{\text{٢س}}{\text{٣س}+١}=\frac{٣}{٥}$$

$\text{١٠س}=\text{٩س}+٣$ ⟸ $\text{س}=٣$ ∴ العدد هو ٣

---

⑤ اذا كان $\frac{\text{س}}{\text{ص}}=\frac{٤}{٥}$ أوجد قيمة المقدار $\frac{\text{٢س}-\text{ص}}{\text{س}+\text{٣ص}}$

الحـــــــل

$\text{س}=\text{٤م}$ ، $\text{ص}=\text{٥م}$

$$\text{المقدار}=\frac{٢(\text{٤م})-(\text{٥م})}{\text{٤م}+٣(\text{٥م})}=\frac{\text{٣م}}{\text{١٩م}}=\frac{٣}{١٩}$$

---

⑥ اذا كان $\frac{\text{س}-\text{٢ص}}{\text{س}+\text{٣ص}}=\frac{١}{٣}$ أوجد $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$

الحـــــــل

$٣(\text{س}-\text{٢ص})=\text{س}+\text{٣ص}$

$\text{٣س}-\text{٦ص}=\text{س}+\text{٣ص}$

$\text{٢س}=\text{٩ص}$ ⟸ $\frac{\text{ص}}{\text{س}}=\frac{٢}{٩}$

---

⑦ اذا كان $\frac{\text{٢١س}+\text{أ}}{\text{٧س}+\text{ب}}=\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ فأوجد قيمة $\frac{\text{أ}+\text{٢ب}}{\text{٢أ}}$ حيث $\text{س}\neq ٠$

الحـــــــل

$\text{٢١ب س}+\text{أب}=\text{٧أس}+\text{أب}$

$\text{٢١ب س}=\text{٧أس}$ ⟸ $\text{٣ب}=\text{أ}$ ⟸ $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}=٣$

$\text{أ}=\text{٣م}$ ، $\text{ب}=\text{م}$ ⟸ $\frac{\text{أ}+\text{٢ب}}{\text{٢أ}}=\frac{\text{٣م}+\text{٢م}}{\text{٦م}}=\frac{\text{٥م}}{\text{٦م}}=\frac{٥}{٦}$

⑧ اذا كان $٢أ=٣ب=٤ج$ فأوجد أ: ب : ج

الحـــــل

$٢أ=٣ب=٤ج$ بالقسمة على ١٢

$$\frac{أ}{٦}=\frac{ب}{٤}=\frac{ج}{٣}=م$$

أ=٦م ، ب=٤م ، ج=٣م

أ: ب : ج=٦م :٤م :٣م ⇐ أ: ب:ج =٦: ٤ : ٣

---

⑨ اذا كان أ : ب : ج = ٣: ٤: ٥ أوجد القيمة العددية للمقدار

$$\frac{أ^{٢}+ب^{٢}+ج^{٢}}{أ(ب+ج)}$$

الحـــــل

أ=٣م ، ب=٤م ، ج=٥م

$$\frac{أ^{٢}+ب^{٢}+ج^{٢}}{أ(ب+ج)}=\frac{(٣م)^{٢}+(٤م)^{٢}+(٥م)^{٢}}{٣م(٤م+٥م)}=\frac{٩م^{٢}+١٦م^{٢}+٢٥م^{٢}}{١٢م^{٢}+١٥م^{٢}}=\frac{٥٠م^{٢}}{٢٧م^{٢}}=\frac{٥٠}{٢٧}$$

---

⑩ اذا كان $\frac{أ}{ب}=\frac{١}{٣}$ ، $\frac{ج}{د}=\frac{٧}{٢}$ فأوجد النسبة $\frac{٢أج+بد}{بج-٣أد}$

الحـــــل

أ=م ، ب= ٣م ، ج=٧ك ، د =٢ك

$$\frac{٢أج+بد}{بج-٣أد}=\frac{٢×م×٧ك+٣م×٢ك}{٣م×٧ك-٣×م×٢ك}=\frac{١٤م ك+٦م ك}{٢١م ك-٦م ك}=\frac{٢٠م ك}{١٥م ك}=\frac{٤}{٣}$$

---

⑪ اذا كان $٩س^{٢}+١٦ص^{٢}=٢٤س ص$ أوجد $\frac{س}{ص}$

الحـــــل

$$(٣س-٤ص)^{٢}=٠ \Leftarrow ٣س-٤ص=٠ \Leftarrow \frac{س}{ص}=\frac{٤}{٣}$$

⑫ اذا كان أ : ب : جـ = ٥ : ٧ : ٣ وكان أ+ب = ٢٧,٦ فأوجد قيمة كلا من أ ، ب ، جـ

الحـــــــل

أ = ٥م ، ب = ٧م ، جـ = ٣م

∵ أ+ب = ٢٧,٦ ∴ ٥م + ٧م = ٢٧,٦ ⟸ م = ٢,٣

أ = ٥ × ٢,٣ = ١١,٥ ، ب = ٧ × ٢,٣ = ١٦,١ ، جـ = ٣ × ٢,٣ = ٦,٩

---

⑬ أوجد س : ص : ع في كل مما يأتى :

① $\frac{س}{ص} = \frac{٣}{٥}$ ، $\frac{ص}{ع} = \frac{٤}{٧}$ ② $\frac{س}{ص} = \frac{٤}{٥}$ ، $\frac{س}{ع} = \frac{٣}{٧}$

الحـــــــل

① س = $\frac{٣}{٥}$ ص ، ع = $\frac{٧}{٤}$ ص

س : ص : ع

$\frac{٣}{٥}$ ص : ص : $\frac{٧}{٤}$ ص

$\frac{٣}{٥}$: ١ : $\frac{٧}{٤}$ " بالضرب × ٢٠ "

١٢ : ٢٠ : ٣٥

② ص = $\frac{٥}{٤}$ س ، ع = $\frac{٧}{٣}$ س

س : ص : ع

س : $\frac{٥}{٤}$ س : $\frac{٧}{٣}$ س

١ : $\frac{٥}{٤}$: $\frac{٧}{٣}$ " بالضرب × ١٢ "

١٢ : ١٥ : ٢٨

⑭ اذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{١}{٣}$ ، $\frac{أ}{جـ} = \frac{١}{٩}$ ، أ+ب+جـ=٢٦ فأوجد كلا من أ ، ب ، جـ

الحـــــل

ب = ٣ أ ، جـ = ٩ أ

أ : ب : جـ

أ : ٣أ : ٩أ

١ : ٣ : ٩

∴ أ : ب : جـ = ١ : ٣ : ٩

نفرض أن أ = م ، ب = ٣م ، جـ = ٩ م

م + ٣م + ٩ م = ٢٦ ⟸ ١٣ م = ٢٦ ⟸ م = ٢

∴ أ = ٢ ، ب = ٦ ، جـ = ١٨

---

⑮ اذا كان ٢أ = ٣ب = ٤جـ أوجد قيمة : $\frac{ب^2 - أجـ}{أب + بجـ}$

الحـــــل

٢أ = ٣ب = ٤جـ بالقسمة على ١٢

$\frac{أ}{٦} = \frac{ب}{٤} = \frac{جـ}{٣} = م$

أ = ٦م ، ب = ٤م ، جـ = ٣م

$\frac{ب^2 - أجـ}{أب + بجـ} = \frac{(٤م)^2 - (٦م)(٣م)}{(٦م)(٤م) + (٤م)(٣م)} = \frac{١٦م^2 - ١٨م^2}{٢٤م^2 + ١٢م^2} = \frac{-٢م^2}{٣٦م^2} = \frac{-١}{١٨}$

---

⑯ اذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{٥}{٢}$ ، $\frac{أ}{جـ} = \frac{٣}{٧}$ أوجد ب : جـ

الحـــــل

ب = $\frac{٢}{٥}$ أ ، جـ = $\frac{٧}{٣}$ أ

ب : جـ = $\frac{٢}{٥}$ أ : $\frac{٧}{٣}$ أ = $\frac{٢}{٥} : \frac{٧}{٣}$ = ٦ : ٣٥

⑰ أكمل ما يلى :

① اذا كان $\frac{\text{س}}{٣} = \frac{\text{ص}}{٥}$ فإن $\frac{٣\text{ص}}{٥\text{س}}$ = ...

② اذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{٧}{٢}$ فإن $\frac{\text{أ}-\text{ب}}{\text{أ}+\text{ب}}$ = ...

③ اذا كان ٣أ = ٨ب فإن $\frac{٢\text{أ}}{\text{ب}}$ = ...

④ اذا كان (س – ٥) : (٥س+٣) = ٢ : ٣ فإن س = ...

⑤ نسبة مساحة منطقة مربعة طول ضلعها ل سم الى مساحة منطقة مربعة أخرى طول ضلعها ٢ ل سم كنسبة .... : ....

⑥ اذا كان $\frac{٣\text{أ}-٢\text{ب}}{٧\text{أ}+٤\text{ب}}$ = صفر فإن $\frac{\text{ب}}{\text{أ}}$ = ...

⑦ اذا كان ٤$\text{س}^٢$ - ١٢ س ص + ٩$\text{ص}^٢$ = ٠ وكانت س ∈ ح ، ص ∈ ح فإن $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ = ...

⑧ اذا كان $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{٣}{٥}$ ، $\frac{\text{ص}}{\text{ع}} = \frac{٤}{٧}$ فإن س : ص : ع = ...: .... : ...

⑨ اذا كان $\frac{\text{أ}}{٩} = \frac{\text{ب}}{٤}$ وكان أ+٢ب=٣٤ فإن أ = ...

⑩ العدد الذى اذا طرح من حدى النسبة $\frac{١٧}{٢٣}$ أصبحت $\frac{٢}{٣}$ هو ....

الحـــــــل

① $\frac{٣\text{ص}}{٥\text{س}}$ = ١　　② $\frac{\text{أ}-\text{ب}}{\text{أ}+\text{ب}} = \frac{٥}{٩}$　　③ $\frac{٢\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{١٦}{٣}$　　④ س = -٣

⑤ ١ : ٤　　⑥ $\frac{\text{ب}}{\text{أ}} = \frac{٣}{٢}$　　⑦ $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{٣}{٢}$　　⑧ ١٢ : ٢٠ : ٣٥

⑨ أ=١٨　　⑩ العدد هو ٥

التناسب

التناسب هو تساوى نسبتين أو أكثر

اذا كان $\frac{م}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإن الكميات م، ب ، جـ ، د تكون متناسبة

والعكس : اذا كان م، ب ، جـ ، **د** كميات متناسبة فإن $\frac{م}{ب} = \frac{جـ}{د}$

ويسمى م بالأول المتناسب ، ب بالثانى المتناسب ، جـ بالثالث المتناسب، د بالرابع المتناسب

من خواص التناسب

① اذا كان $\frac{م}{ب} = \frac{جـ}{د} =$ م فإن م = ب م ، جـ = د م

② اذا كان $\frac{م}{ب} = \frac{جـ}{د} = \frac{هـ}{و} = ...$ وكانت $م_١ ، م_٢ ، م_٣ ، ...$ أعداد حقيقية $\neq$ صفر

فإن $\frac{م_١ م + م_٢ جـ + م_٣ هـ + ...}{م_١ ب + م_٢ د + م_٣ و + ...}$ = احدى النسب

تمارين محلولة

① **اذا كان** $\frac{س}{٧} = \frac{ص}{٣}$ فأثبت أن : (٢س - ٣ص)، (س+٢ص)، ١٠، ٢٦ متناسبة

الحل

$\because \frac{س}{٧} = \frac{ص}{٣} = م$

$\therefore$ س = ٧م ، ص = ٣م

$\frac{٢س - ٣ص}{س + ٢ص} = \frac{١٤م - ٩م}{٧م + ٦م} = \frac{٥}{١٣}$

$\because \frac{١٠}{٢٦} = \frac{٥}{١٣}$ $\therefore \frac{٢س - ٣ص}{س + ٢ص} = \frac{١٠}{٢٦}$

$\therefore$ (٢س - ٣ص)، (س+٢ص)، ١٠، ٢٦ متناسبة

② اذا كان $\frac{أ}{ب - أ} = \frac{ج}{د - ج}$ فأثبت أن أ ، ب ، ج ، د متناسبة

الحـــــــــل

$\because \frac{أ}{ب - أ} = \frac{ج}{د - ج}$

$\therefore$ أ (د − ج) = ج (ب − أ)

أ د − أ ج = ج ب − ج أ

أ د = ج ب $\quad \therefore \frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$ $\quad \therefore$ أ ، ب ، ج ، د متناسبة

---

③ أوجد العدد الذى اذا أضيف الى كل من الأعداد ٣ ، ٥ ، ٨ ، ١٢ فإنها تكون متناسبة

الحـــــــــل

نفرض أن العدد هو س

$\therefore$ ٣ + س ، ٥ + س ، ٨ + س ، ١٢ + س متناسبة

$\frac{٣ + س}{٥ + س} = \frac{٨ + س}{١٢ + س}$

(٣ + س) (١٢ + س) = (٥ + س) (٨ + س)

٣٦ + ١٥ س + $س^٢$ = ٤٠ + ١٣ س + $س^٢$

٢ س = ٤ ⟸ س = ٢ $\therefore$ العدد هو ٢

---

④ أوجد كلا من :

① الأول المتناسب للأعداد : .... ، $\sqrt{٨}$ ، ٧ ، ١٤ $\sqrt{٢}$

② الثالث المتناسب للأعداد : ٣ ، ٤ ، .... ، ٢٠

③ الرابع المتناسب للأعداد : ٤ ، ١٢ ، ١٦ ، ....

الحـــــــــل

① الأول المتناسب ١

② الثالث المتناسب ١٥

③ الرابع المتناسب ٤٨

⑤ اذا كان $\frac{\text{س + ص}}{\text{٧}} = \frac{\text{ص + ع}}{\text{٥}} = \frac{\text{ع + س}}{\text{٨}}$ اثبت أن $\frac{\text{س + ص + ع}}{\text{س - ع}} = \text{٥}$

الحـــــــــل

بجمع مقدمات وتوالى النسب الثلاث

$\frac{\text{٢س + ٢ص + ٢ع}}{\text{٧ + ٥ + ٨}}$ = احدى النسب

$\frac{\text{٢(س+ص+ع)}}{\text{٢٠}}$ = احدى النسب

$\frac{\text{س+ص+ع}}{\text{١٠}}$ = احدى النسب ← ①

بضرب النسبة الثانية فى -١ والجمع مع الاولى

$\frac{\text{س - ع}}{\text{٧ - ٥}}$ = احدى النسب

$\frac{\text{س - ع}}{\text{٢}}$ = احدى النسب ← ②

من (١) ، (٢) نجد ان $\frac{\text{س+ص+ع}}{\text{١٠}} = \frac{\text{س - ع}}{\text{٢}}$

∴ $\frac{\text{س + ص + ع}}{\text{س - ع}} = \frac{\text{١٠}}{\text{٢}} = \text{٥}$

---

⑥ اذا كان $\frac{\text{س}}{\text{٢أ + ب}} = \frac{\text{ص}}{\text{٢ب − جـ}} = \frac{\text{ع}}{\text{٢جـ − أ}}$ اثبت أن $\frac{\text{٢س + ص}}{\text{٤أ + ٤ب − جـ}} = \frac{\text{٢س + ٢ص + ع}}{\text{٣أ + ٦ب}}$

الحـــــــــل

بضرب الأولى فى ٢ و الجمع مع الثانية

$\frac{\text{٢س + ص}}{\text{٤أ + ٤ب − جـ}}$ = احدى النسب ← ①

بضرب الأولى والثانية فى ٢ والجمع مع الثالثة

$\frac{\text{٢س + ٢ص + ع}}{\text{٤أ + ٢ب + ٤ب − ٢جـ + ٢جـ − أ}}$ = احدى النسب

$\frac{\text{٢س + ٢ص + ع}}{\text{٣أ + ٦ب}}$ = احدى النسب ← (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن $\frac{\text{٢س + ص}}{\text{٤أ + ٤ب − جـ}} = \frac{\text{٢س + ٢ص + ع}}{\text{٣أ + ٦ب}}$

---

⑦ أكمل ما يلى :

① $\frac{\text{س}}{\text{٦}} = \frac{\text{ص}}{\text{٥}} = \frac{\text{ع}}{\text{٤}} = \frac{\text{....}}{\text{١١}} = \frac{\text{٢ص+ع}}{\text{....}}$

② اذا كان $\frac{\text{س}}{\text{٢}} = \frac{\text{ص}}{\text{٣}} = \frac{\text{٤س-٢ص}}{\text{ع}}$ فإن ع = ...

③ اذا كانت ٢ ، ٦ ، س +١٥ متناسبة فإن س = ...

④ $\frac{\text{ل}}{\text{٣}} = \frac{\text{م}}{\text{٨}} = \frac{\text{ل} + \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{م}}{\text{....}}$

⑤ اذا كان $\frac{\text{س}}{\text{٢}} = \frac{\text{ص}}{\text{٧}} = \frac{\text{٢س+ص}}{\text{أ}}$ فإن أ = ...

⑥ اذا كان $\frac{\text{س + ص}}{\text{٥}} = \frac{\text{ص + هـ}}{\text{٣}} = \frac{\text{هـ + س}}{\text{٦}}$ فإن $\frac{\text{س − هـ}}{\text{٢}} = \frac{\text{ص − س}}{\text{....}}$

⑦ $\frac{\text{أ}}{\text{٢}} = \frac{\text{جـ}}{\text{٣}} = \frac{\text{هـ}}{\text{٤}} = \frac{\text{٢أ + ٣جـ − ٢هـ}}{\text{.....}}$

الحـــــل

① $\frac{\text{س+ص}}{\text{١١}} = \frac{\text{٢ص+ع}}{\text{١٤}}$ ② ع = ٢ ③ س=٣ ④ $\frac{\text{ل}}{\text{٣}} = \frac{\text{م}}{\text{٨}} = \frac{\text{ل} + \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{م}}{\text{٧}}$

⑤ أ=١١ ⑥ $\frac{\text{س − هـ}}{\text{٢}} = \frac{\text{ص − س}}{\text{−٣}}$ ⑦ $\frac{\text{٢أ + ٣جـ − ٢هـ}}{\text{٥}}$

⑧ اذا كان $\frac{أ + ٤ب}{س + ٢ص} = \frac{٤ب + ٧جـ}{٢ص + ٥ع} = \frac{٧جـ + أ}{٥ع + س}$ فأثبت أن $\frac{أ}{٢ب} = \frac{س}{ص}$

الحـــل

بضرب الثانية فى (-١) والجمع مع الاولى والثالثة

$$\frac{أ + ٤ب - ٤ب - ٧جـ + ٧جـ + أ}{س + ٢ص - ٢ص - ٥ع + ٥ع + س} = \frac{٢أ}{٢س} = \frac{أ}{س} =$$ **احدى النسب** ← ①

بضرب الثالثة فى (-١) والجمع مع الاولى والثانية

$$\frac{أ + ٤ب + ٤ب + ٧جـ - ٧جـ - أ}{س + ٢ص + ٢ص + ٥ع - ٥ع - س} = \frac{٨ب}{٤ص} = \frac{٢ب}{ص} =$$ **احدى النسب** ← ②

من (١) ، (٢) نجد أن :

$$\frac{أ}{٢ب} = \frac{س}{ص}$$

---

⑨ اذ ا كان $\frac{أ+ب}{١١} = \frac{ب+جـ}{٩} = \frac{جـ+أ}{٤}$ فأثبت أن $\frac{أ+ب+جـ}{٥أ+٤ب+٣جـ} = \frac{٦}{٢٥}$

الحـــل

بجمع مقدمات وتوالى النسب الثلاث

$$\frac{٢أ + ٢ب + ٢جـ}{٢٤} = \frac{أ + ب+جـ}{١٢} =$$ **احد ى النسب** ← ①

بضرب الاولى فى (٣) والثالثة فى (٢) والجمع مع الثانية

$$\frac{٣أ + ٣ب + ب+جـ + ٢جـ + ٢أ}{٣٣ + ٩ + ٨} = \frac{٥أ + ٤ب + ٣جـ}{٥٠} =$$ **احدى النسب** ← ②

من (١) ، (٢) نجد أن :

$$\frac{أ+ب+جـ}{٥أ+٤ب+٣جـ} = \frac{١٢}{٥٠} = \frac{٦}{٢٥}$$

⑩ اذا كان $\frac{أ}{٢} = \frac{ب}{٣} = \frac{جـ}{٤} = \frac{٢أ - ب + ٥جـ}{٣س}$ احسب قيمة س

الحـــــــل

بضرب الاولى فى (٢) والثانية فى (-١) والثالثة فى (٥) والجمع

$\frac{٢أ - ب + ٥جـ}{٤ - ٣ + ٢٠}$ = احدى النسب

$\frac{٢أ - ب + ٥جـ}{٢١} = \frac{٢أ - ب + ٥جـ}{٣س}$

$٣س = ٢١ \Longrightarrow س = ٧$

---

⑪ اذا كانت أ ، ب ، جـ ، ء كميات متناسبة فإن

$\frac{٥أ + ٣جـ}{٥ب + ٣ء} = \frac{٣أ - ٢جـ}{٣ب - ٢ء}$

الحـــــــل

نفرض ان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{ء}$ = م

أ = ب م ، جـ = ء م

$\frac{٥أ + ٣جـ}{٥ب + ٣ء} = \frac{٥ب م + ٣ء م}{٥ب + ٣ء}$ = م ⟵ ①

$\frac{٣أ - ٢جـ}{٣ب - ٢ء} = \frac{٣ب م - ٢ء م}{٣ب - ٢ء}$ = م ⟵ ②

من (١) ، (٢) نجد أن الطرفين متساويان

$\frac{٥أ + ٣جـ}{٥ب + ٣ء} = \frac{٣أ - ٢جـ}{٣ب - ٢ء}$

التناسب المتسلسل

اذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ}$ فإن الكميات أ ، ب ، جـ فى تناسب متسلسل ، والعكس :

اذا كانت أ ، ب ، جـ فى تناسب متسلسل فإن $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ}$ ويسمى أ بالاول المتناسب ، ب بالوسط المتناسب ، جـ بالثالث المتناسب

ملاحظات

(١) اذا كان أ ، ب ، جـ فى تناسب متسلسل فإن $ب^2 = أجـ$

(٢) اذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{د} = م$ فإن جـ = د م ، ب = د $م^2$ ، أ = د $م^3$

تمارين محلولة

(١) أوجد العدد الذى اذا اضيف الى كل من الاعداد ٣ ، ٧ ، ١٥ فإنها تكون تناسبا متسلسلا

الحـــــل

نفرض أن العدد هو س

$\frac{س+٣}{س+٧} = \frac{س+٧}{س+١٥} \Leftarrow (س+٣)(س+١٥) = (س+٧)^2$

$س^2 + ١٨س + ٤٥ = س^2 + ١٤س + ٤٩$

$١٨س - ١٤س = ٤٩ - ٤٥$

$٤س = ٤ \Leftarrow س = ١$

---

(٢) اذا كان أ ، ٣ ، ٩ ، ب فى تناسب متسلسل أوجد قيمة أ ، ب ؟؟

الحـــــــل

$\frac{أ}{٣} = \frac{٣}{٩} = \frac{٩}{ب} \Longleftarrow أ = ١ ، ب = ٢٧$

---

③ اذا كانت أ ، ب ، جـ ، د فى تناسب متسلسل اثبت ان

$\frac{أ + د}{ب - جـ + د} = \frac{أ - جـ}{ب - جـ}$

الحـــــــل

نفرض ان $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{د} = م$

$جـ = د م ، ب = د م^{٢} ، أ = د م^{٣}$

$\frac{أ + د}{ب - جـ + د} = \frac{د م^{٣} + د}{د م^{٢} - د م + د} = \frac{د(م^{٣} + ١)}{د(م^{٢} - م + ١)} = \frac{(م + ١)(م^{٢} - م + ١)}{م^{٢} - م + ١} = م + ١$

$\frac{أ - جـ}{ب - جـ} = \frac{د م^{٣} - د م}{د م^{٢} - د م} = \frac{د م(م^{٢} - ١)}{د م(م - ١)} = \frac{(م - ١)(م + ١)}{م - ١} = م + ١$

∴ الطرفان متساويان

---

④ اذا كان ص وسطا متناسبا بين س ، ع أثبت ان

$\frac{س^{٢}}{ص^{٢}} + \frac{ص^{٢}}{ع^{٢}} = \frac{٢ س}{ع}$

الحـــــــل

$\frac{س}{ص} = \frac{ص}{ع} = م$ ∴ $س = ع م^{٢}$ ، $ص = ع م$

$\frac{س^{٢}}{ص^{٢}} + \frac{ص^{٢}}{ع^{٢}} = \frac{ع^{٢} م^{٤}}{ع^{٢} م^{٢}} + \frac{ع^{٢} م^{٢}}{ع^{٢}} = م^{٢} + م^{٢} = ٢ م^{٢}$

$\frac{٢ س}{ع} = \frac{٢ ع م^{٢}}{ع} = ٢ م^{٢}$

∴ الطرفان متساويان

⑤ اذا كان أ ، ب ، جـ ، د فى تناسب متسلسل اثبت ان (ب+جـ) وسط متناسب بين (أ+ب) ، (جـ+د)

الحـــــل

$\frac{أ}{ب}=\frac{ب}{جـ}=\frac{جـ}{د}=م$ ∴ جـ = دم ، ب = دم^{٢} ، أ = دم^{٣}

$(ب+جـ)^{٢}=(دم^{٢}+دم)^{٢}=د^{٢}م^{٤}+٢د^{٢}م^{٣}+د^{٢}م^{٢}$ ← [١]

$(أ+ب)(جـ+د)=(دم^{٣}+دم^{٢})(دم+د)=د^{٢}م^{٤}+د^{٢}م^{٣}+د^{٢}م^{٣}+د^{٢}م^{٢}$

$=د^{٢}م^{٤}+٢د^{٢}م^{٣}+د^{٢}م^{٢}$ ← [٢]

من (١) ، (٢) نجد ان :

∴ $(ب+جـ)^{٢}=(أ+ب)(جـ+د)$

∴ (ب+جـ) وسط متناسب بين (أ+ب) ، (جـ+د)

---

⑥ اذا كان ص^{٢}=س ع اثبت أن $\frac{س(س-ص)}{ص(ص-ع)}=\frac{ص^{٢}}{ع^{٢}}$

الحـــــل

∵ ص^{٢}=س ع ∴ $\frac{س}{ص}=\frac{ص}{ع}=م$ ∴ س=ع م^{٢} ، ص = ع م

$\frac{س(س-ص)}{ص(ص-ع)}=\frac{ع م^{٢}(ع م^{٢}-ع م)}{ع م(ع م-ع)}$

$=\frac{م^{٢}(ع م-ع)}{(ع م-ع)}=م^{٢}$ ← [١]

$\frac{ص^{٢}}{ع^{٢}}=\frac{ع^{٢}م^{٢}}{ع^{٢}}=م^{٢}$ ← [٢]

من [١] ، [٢] نجد أن :

$\frac{س(س-ص)}{ص(ص-ع)}=\frac{ص^{٢}}{ع^{٢}}$

(٧) اذا كانت ٥أ ، ٦ب ، ٧جـ ، ٨د كميات موجبة فى تناسب متسلسل فأثبت أن :

$$\sqrt[3]{\frac{\text{٥أ}}{\text{٨د}}} = \sqrt{\frac{\text{٥أ}+\text{٦ب}}{\text{٧جـ}+\text{٨د}}}$$

الحـــــــل

نفرض أن $\frac{\text{٥أ}}{\text{٦ب}} = \frac{\text{٦ب}}{\text{٧جـ}} = \frac{\text{٧جـ}}{\text{٨د}} = \text{م}$

$\text{٧جـ} = \text{٨د م}$ ، $\text{٦ب} = \text{٨د م}^{٢}$ ، $\text{٥أ} = \text{٨د م}^{٣}$

$$\sqrt[3]{\frac{\text{٥أ}}{\text{٨د}}} = \sqrt[3]{\frac{\text{٨د م}^{٣}}{\text{٨د}}} = \sqrt[3]{\text{م}^{٣}} = \text{م} \longrightarrow [١]$$

$$\sqrt{\frac{\text{٥أ}+\text{٦ب}}{\text{٧جـ}+\text{٨د}}} = \sqrt{\frac{\text{٨د م}^{٢}(\text{م}+١)}{\text{٨د}(\text{م}+١)}} = \sqrt{\text{م}^{٢}} = \text{م} \longrightarrow [٢]$$

من [١] ، [٢] نجد أن

$$\sqrt[3]{\frac{\text{٥أ}}{\text{٨د}}} = \sqrt{\frac{\text{٥أ}+\text{٦ب}}{\text{٧جـ}+\text{٨د}}}$$

---

(٨) أكمل ما يلى :

(١) الثالث المتناسب للعددين ٩ ، -١٢ هو .....

(٢) الوسط المتناسب بين ٣ ، ٢٧ هو ....

(٣) اذا كان أ، ٢ ، ٤ ، ب فى تناسب متسلسل فإن أ+ب = ...

(٤) اذا كانت ٧ ، س ، $\frac{١}{\text{ص}}$ فى تناسب متسلسل فإن $\text{س}^{٢}\text{ص}$ = ...

(٥) اذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{\text{جـ}}{٥} = ٢$ فإن أ = ...

الحـــــل : (١) ١٦ (٢) ±٩ (٣) ٩ (٤) ٧ (٥) أ = ٤٠

⑨ **اذا كانت أ ، ب ، جـ ، د في تناسب متسلسل اثبت أن :**

$$\left(\frac{أ+ب}{ب+جـ}\right)^{٣} = \frac{أ}{د}$$

الحـــــل

نفرض ان $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{د} = م$

$\therefore$ جـ = د م ، ب = د $م^{٢}$ ، أ = د $م^{٣}$

$$\left(\frac{أ+ب}{ب+جـ}\right)^{٣} = \left(\frac{د م^{٣} + د م^{٢}}{د م^{٢} + د م}\right)^{٣} = \left(\frac{د م^{٢}(م+١)}{د م(م+١)}\right)^{٣} = م^{٣} \longrightarrow (١)$$

$$\frac{أ}{د} = \frac{د م^{٣}}{د} = م^{٣} \longrightarrow (٢)$$

من (١) ، (٢) نجد أن :

$$\left(\frac{أ+ب}{ب+جـ}\right)^{٣} = \frac{أ}{د}$$

---

⑩ **اذا كانت ب وسطا متناسبا بين أ ، جـ اثبت أن :**

$$\frac{أ^{٢}}{ب^{٢}} + \frac{ب^{٢}}{جـ^{٢}} = \frac{٢أ}{جـ}$$

الحـــــل

نفرض ان $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = م$

$\therefore$ ب = جـ م ، أ = جـ $م^{٢}$

$$\frac{٢أ}{جـ} = \frac{٢ جـ م^{٢}}{جـ} = ٢ م^{٢} \longrightarrow (١)$$

$$\frac{أ^{٢}}{ب^{٢}} + \frac{ب^{٢}}{جـ^{٢}} = \frac{جـ^{٢} م^{٤}}{جـ^{٢} م^{٢}} + \frac{جـ^{٢} م^{٢}}{جـ^{٢}} = م^{٢} + م^{٢} = ٢ م^{٢} \longrightarrow (٢)$$

من (١) ، (٢) نجد أن :

$$\frac{أ^{٢}}{ب^{٢}}+\frac{ب^{٢}}{جـ^{٢}}=\frac{٢أ}{جـ}$$

---

⑪ اذا كانت ب وسطا متناسبا بين أ ، جـ اثبت أن :

$$\frac{أ+ب+جـ}{أ^{-١}+ب^{-١}+جـ^{-١}}=ب^{٢}$$

الحـــــــل

نفرض ان $\frac{أ}{ب}=\frac{ب}{جـ}=م$

∴ $ب=جـ م$ ، $أ=جـ م^{٢}$

$$\frac{أ+ب+جـ}{أ^{-١}+ب^{-١}+جـ^{-١}}=\frac{جـ م^{٢}+جـ م+جـ}{جـ^{-١}م^{-٢}+جـ^{-١}م^{-١}+جـ^{-١}}=\frac{جـ(م^{٢}+م+١)}{جـ^{-١}م^{-٢}(١+م+م^{٢})}$$

$$=جـ^{٢}م^{٢}=ب^{٢}$$

---

⑫ اذا كانت أ ، ب ، جـ ، د فى تناسب متسلسل اثبت أن :

$$\frac{أ+٥ب}{ب+٥جـ}=\sqrt{\frac{ب}{د}}$$

الحـــــل

نفرض ان $\frac{أ}{ب}=\frac{ب}{جـ}=\frac{جـ}{د}=م$

∴ $جـ=د م$ ، $ب=د م^{٢}$ ، $أ=د م^{٣}$

$$\frac{أ+٥ب}{ب+٥جـ}=\frac{د م^{٣}+٥د م^{٢}}{د م^{٢}+٥د م}=\frac{د م^{٢}(م+٥)}{د م(م+٥)}=م \longrightarrow (١)$$

$$\sqrt{\frac{ب}{د}}=\sqrt{\frac{د م^{٢}}{د}}=م \longrightarrow (٢)$$

من (١) ، (٢) نجد أن الطرفين متساوين

⑬ اذا كانت ب وسطا متناسبا بين أ، جـ اثبت ان :

$$\frac{\text{٢جـ}^{٢} - \text{٣ب}^{٢}}{\text{٢ب}^{٢} - \text{٣أ}^{٢}} = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{\text{جـ}^{٢}}{\text{ب}^{٢}}$$

الحـــــــــل

نفرض ان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \text{م}$

∴ ب = جـ م ، أ = جـ $\text{م}^{٢}$

$$\frac{\text{٢جـ}^{٢} - \text{٣ب}^{٢}}{\text{٢ب}^{٢} - \text{٣أ}^{٢}} = \frac{\text{٢جـ}^{٢} - \text{٣جـ}^{٢}\text{م}^{٢}}{\text{٢جـ}^{٢}\text{م}^{٢} - \text{٣جـ}^{٢}\text{م}^{٤}} = \frac{\text{جـ}^{٢}(٢ - \text{٣م}^{٢})}{\text{جـ}^{٢}\text{م}^{٢}(٢ - \text{٣م}^{٢})} = \frac{١}{\text{م}^{٢}} \longrightarrow \boxed{١}$$

$$\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{جـ م}^{٢}} = \frac{١}{\text{م}^{٢}} \longrightarrow \boxed{٢}$$

$$\frac{\text{جـ}^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = \frac{\text{جـ}^{٢}}{\text{جـ}^{٢}\text{م}^{٢}} = \frac{١}{\text{م}^{٢}} \longrightarrow \boxed{٣}$$

من (١) ، (٢) ، (٣) ينتج المطلوب

---

⑭ أوجد العدد الذى اذا أضيف الى كل من الأعداد ٢ ، ٨ ، ٢٦ فإنها تكون تناسبا متسلسلا

الحـــــــــل

نفرض أن العدد هو س

$$\frac{\text{س} + ٢}{\text{س} + ٨} = \frac{\text{س} + ٨}{\text{س} + ٢٦}$$

$(\text{س} + ٢)(\text{س} + ٢٦) = (\text{س} + ٨)^{٢}$

$\text{س}^{٢} + ٢٨\text{س} + ٥٢ = \text{س}^{٢} + ١٦\text{س} + ٦٤$

$٢٨\text{س} - ١٦\text{س} = ٦٤ - ٥٢$

$١٢\text{س} = ١٢$

$\text{س} = ١$

∴ العدد هو ١

التغير الطــــردى والعكسى

تعريف :

***يقال ان ص تتغير طرديا مع س وتكتب ص $\propto$ س اذا كان ص = م س**

(م ثابت لايساوى صفر)

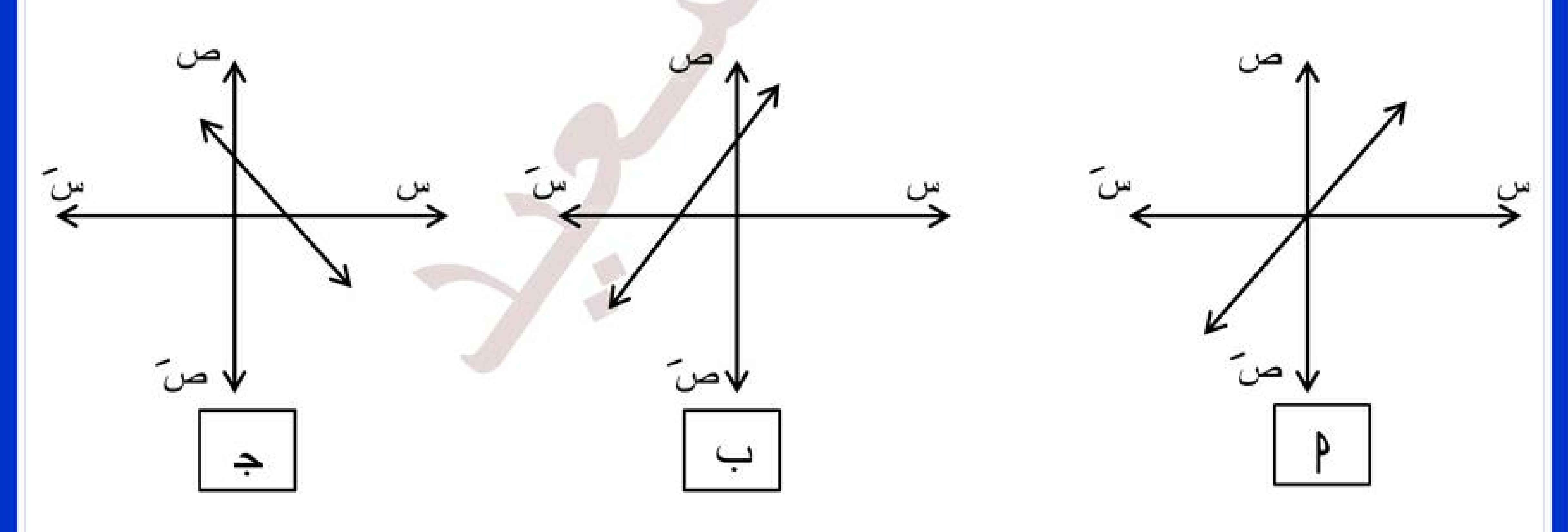
$$\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{س_1}{س_2}$$

***يقال ان ص تتغير عكسيا مع س وتكتب ص $\propto \frac{1}{س}$ اذا كانت ص= $\frac{م}{س}$**

$$\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{س_2}{س_1}$$

تمارين محلولة:

① اى من الاشكال الاتية يمثل تغيرا طرديا بين س ، ص ؟



الحل : الشكل رقم (م) يمثل تغيرا طرديا لأنه مستقيم يمر بنقطة الأصل

---

② اختر مما يلى العلاقة التى تمثل تغيرا طرديا بين المتغيرين س ، ص :

(م) س ص = ٧ (ب) ص= س+٢ (جـ) $\frac{س}{٣} = \frac{٤}{ص}$ (د) $\frac{س}{٥} = \frac{ص}{٢}$

الحـل : $\frac{س}{٥} = \frac{ص}{٢}$

③ من بيانات الجدول التالى ؟ أجب عن الاسئلة التالية :

س	٢	٤	٦
ص	٦	٣	٢

① بين نوع التغير بين س ، ص ② أوجد ثابت التناسب

③ أوجد قيمة ص عندما س = ٣ ④ أوجد قيمة س عندما ص = $٢\frac{٢}{٥}$

الحـــــل

① التغير عكسى ② ثابت التناسب = ١٢

③ ∵ ص ∝ $\frac{١}{س}$ ∴ ص س = م

عندما س = ٣ ∴ ٣ص = ١٢ ∴ ص = ٤

④ عندما ص = $٢\frac{٢}{٥}$ ∴ $٢\frac{٢}{٥}$ × س = ١٢ ∴ س = ٥

---

④ فى الجدول المقابل :

س	١	٢	ب	٤	٦
ص	١٢	ﻫ	٣٦	٤٨	٧٢

① بين نوع التغير بين س ، ص

② أوجد قيمتى ﻫ ، ب

الحـــــل

① التغير طردى

② ∵ ص ∝ س ∴ ص = م س ∴ م = ١٢

ﻫ = ٢ × ١٢ = ٢٤

٣٦ = ١٢ × ب ∴ ب = ٣

---

⑤ اذا كان ٤ﻫ^{٢} + ٩ب^{٢} = ١٢ﻫب أثبت أن ﻫ تتغير طرديا بتغير ب

الحـــــل

٤ﻫ^{٢} − ١٢ﻫب + ٩ب^{٢} = ٠

$(٢م - ٣ب)^٢ = ٠$

$٢م - ٣ب = ٠$

$م = \frac{٣}{٢} ب$ ∴ $م \propto ب$

---

⑥ **اذا كانت** $س^٢ ص^٢ - ٦ س ص + ٩ = ٠$ **أثبت أن ص تتغير عكسيا مع س**

الحـــــــل

$(س ص - ٣)^٢ = ٠$

$س ص = ٣$

∴ **ص تتغير عكسيا مع س**

---

⑦ **اذا كان** $\frac{٢١ س - ص}{٧ س - ع} = \frac{ص}{ع}$ **اثبت أن ص** $\propto$ **ع**

الحـــــل

٢١س ع – ص ع = ٧ س ص – ص ع

٢١س ع = ٧ س ص

٣ ع = ص ∴ **ص** $\propto$ **ع**

---

⑧ **اذا كانت ص تتغير عكسيا بتغير س وكانت ص = ٦ عندما س = ٢,٥ فأوجد العلاقة بين س ، ص ثم أوجد قيمة ص عندما س = ٥**

الحـــــــل

∵ **ص** $\propto \frac{١}{س}$ ∴ **س ص = م**

∵**ص = ٦ عندما س = ٢,٥**

∴ **م = ٦ × ٢,٥ = ١٥**

∴**العلاقة بين س ، ص هى : س ص = ١٥**

عندما س = ٥ ⟸ ص = ٣

⑨ أكمل ما يلى :

① اذا كان ص – س = $\frac{١}{\text{س}} - \frac{١}{\text{ص}}$ حيث س ≠ ٠ ، ص ≠ ٠ فإن ص ∝ ....

② اذا كانت ص = ٣س فإن ص ∝ ....

③ اذا كانت س ص -٧ = ٠ فإن ص ∝ ....

④ اذا كانت س^٢ ص^٢ - ٤ س ص + ٤ = ٠ فإن ص ∝ ....

⑤ اذا كانت ص^٢ - ٦ س ص + ٩ س^٢ = ٠ فإن ص ∝ ....

⑥ اذا كانت ص تتغير عكسيا مع س وكانت س = $\sqrt{٣}$ عندما ص = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ فإن ثابت التناسب= .....

⑦ اذا كانت $\frac{\text{ص}+٣}{\text{ص}} = \frac{\text{س}+٢}{\text{س}}$ حيث س ≠ ص ≠ ٠ فإن ص ∝ ....

⑧ اذا كانت ٢س – ٣ص = ٢ص - ٥س فإن س ∝ ....

⑨ اذا كان ٧ س ص = ٨ فإن س ∝ ....

⑩ اذا كان (س ص – ٣)^٢ =صفر فإن ص ∝ ....

⑪ اذا كانت ص ∝ $\frac{١}{\sqrt{\text{س}}}$ فإن س تتناسب عكسيا مع .....

⑫ اذا كانت ث = $\frac{\text{م ك}}{\text{ع}}$ حيث م ثابت لايساوى صفر فإن ث تتغير .....مع ك عند ثبوت ع ، ث تتغير .....مع ع عند ثبوت ك

⑬ اذا كانت ص ∝ $\frac{٥}{\text{س}}$ فإن ص تتغير عكسيا مع ....

الحـــــل

① ص ∝ $\frac{١}{\text{س}}$ ② ص ∝ س ③ ص ∝ $\frac{١}{\text{س}}$ ④ ص ∝ $\frac{١}{\text{س}}$ ⑤ ص ∝ س

⑥ ثابت التناسب= ٢ ⑦ ص ∝ س ⑧ س ∝ ص ⑨ س ∝ $\frac{١}{\text{ص}}$

⑩ $ص \propto \frac{١}{س}$ ⑪ س تتناسب عكسيا مع $ص^٢$

⑫ ث تتغير طرديا مع ل عند ثبوت ع ، ث تتغير عكسيا مع ع عند ثبوت ل

⑬ ص تتغير عكسيا مع س

---

⑩ اذا كان وزن جسم على القمر (و) يتناسب طرديا مع وزنه على الأرض (ر) ، وكان الجسم يزن ٨٤ كيلو جراما على الأرض ، ووزنه ١٤ كيلوجراما على القمر ، فماذا يكون وزن الجسم على القمر اذا كان وزنه على الأرض ١٤٤ كيلو جراما ؟

الحـــــل

∵ و $\propto$ ر ∴ و = م ر ١٤ = م × ٨٤

$م = \frac{١٤}{٨٤} = \frac{١}{٦}$

و = $\frac{١}{٦}$ ر عندما ر = ١٤٤ ∴ و = $\frac{١}{٦}$ × ١٤٤ = ٢٤ **كيلو جراما**

---

⑪ تسير سيارة بسرعة ثابتة بحيث تتناسب المسافة المقطوعة طرديا مع الزمن فإذا قطعت السيارة ١٥٠ كيلومترا فى ٦ ساعات فكم كيلومترا تقطعها السيارة فى ١٠ ساعات

الحـــــل

ف $\propto$ ر ∴ ف = م ر

١٥٠ = م × ٦ ∴ م = ٢٥ العلاقة هى : ف = ٢٥ ر

عندما ر = ١٠ ∴ ف = ١٠ × ٢٥

ف = ٢٥٠ كيلومترا

(١٢) اذا كان مقدار السرعة ع التى يخرج بها الماء من فوهة خرطوم يتغير عكسيا بتغير مربع طول نصف قطر فوهة الخرطوم نق وكانت ع = ٥ سم/ ث

عندما نق = ٣ سم أوجد ع عندما نق = ٢,٥ سم

الحـــل

$ع \propto \frac{١}{نق^٢}$ $\therefore ع = \frac{م}{نق^٢}$

$٥ = \frac{م}{٩}$ $\therefore م = ٤٥$

$ع = \frac{٤٥}{نق^٢}$ عندما نق = ٢,٥ تكون $ع = \frac{٤٥}{(٢,٥)^٢} = ٧,٢$ سم/ث

---

(١٣) اذا كان عدد الساعات (ن) اللازمة لانجاز عمل ما يتناسب عكسيا مع عدد العمال (س) الذين يقومون بهذا العمل فإذا أنجز العمل ٦ عمال فى أربع ساعات فما الزمن الذى يستغرقه ٨ عمال لإنجاز هذا العمل ؟

الحــــــل

$ن \propto \frac{١}{س}$ $\therefore ن = \frac{م}{س}$ $٤ = \frac{م}{٦}$ $\therefore م = ٢٤$

$ن = \frac{٢٤}{س}$ عندما س = ٨ $\therefore ن = \frac{٢٤}{٨} = ٣$

$\therefore$ الزمن الذى يستغرقه هو ٣ ساعات

---

(١٤) اذا كان ص = ا − ٩ وكان $ص \propto \frac{١}{س^٢}$ وكان ا = ١٨ عندما س = $\frac{٢}{٣}$ فأوجد العلاقة بين ص ، س ثم استنتج قيمة ص عندما س = ١

الحــــل

$\because ص \propto \frac{١}{س^٢}$ $\therefore ص = \frac{م}{س^٢}$

$\frac{م}{س^٢} = أ - ٩$

$م = س^٢ (أ - ٩)$ $م = (\frac{٢}{٣})^٢ (١٨ - ٩) = ٤$

∴ العلاقة هى : $ص = \frac{٤}{س^٢}$ عندما س = ١ تكون ص = ٤

---

⑮ بين ايا من الجداول الاتية يمثل تغيرا طرديا وايها يمثل تغيرا عكسيا وايها لا يمثل طرديا او عكسيا مع ذكر السبب ؟

جدول ١

س	ص
٣	٢٠
٥	١٢
٤	١٥
٦	١٠

جدول ٢

س	ص
٢	٩
٤	١٨
١٢	٥٤
١٦	٧٢

جدول ٣

س	ص
٥	٩
١٠	١٨
١٥	٢٧
٢٥	٤٥

جدول ٤

س	ص
٣	٦
-٢	-٩
-١٨	١
٩	-٢

الحـــــــل

الجدول رقم (١) تغير عكسى

السبب : ٣×٢٠=٦٠ ، ٥×١٢=٦٠ ، ٤×١٥=٦٠ ، ١٠×٦=٦٠

الجدول رقم (٢) تغير طردى

السبب : $\frac{٩}{٢} = \frac{١٨}{٤} = \frac{٥٤}{١٢} = \frac{٧٢}{١٦}$

الجدول رقم (٣) تغير طردى

السبب : $\frac{٩}{٥} = \frac{١٨}{١٠} = \frac{٢٧}{١٥} = \frac{٤٥}{٢٥}$

الجدول رقم (٤) ليس طرديا وليس عكسيا

السبب : ٣×٦ $\neq$ -١٨×١ ، $\frac{٦}{٣} \neq \frac{-٩}{-٢}$

⑯ اذا كانت شدة الاستضاءة (ش) لمصباح تتغير عكسيا مع مربع بعد المصباح (ف) عن تلميذ يذاكر دروسه على بعد ١٢ متر فإذا كانت شدة الاستضاءة ضعيفة فما هو البعد الذى يوضع فيه المصباح حتى تزيد قوة الاستضاءة الى اربعة امثالها ؟

الحـــــل

$$ش \propto \frac{1}{ف^2}$$

$$\frac{ش_1}{ش_2} = \frac{ف_2^2}{ف_1^2}$$

$ش_1 =$ ش عندما ف = ١٢

$ش_2 =$ ٤ش عندما ف = ؟

$$\frac{ش}{٤ش} = \frac{ف_2^2}{(١٢)^2} \Leftarrow ف_2^2 = ٣٦ \Leftarrow ف_2 = ٦$$

∴ البعد = ٦ متر

---

⑰ تتحرك سيارة كتلتها ٣ طن بسرعة منتظمة تحت تأثير مقاومة تتناسب مع سرعتها فإذا كانت المقاومة ٦ث.كجم/طن من كتلة السيارة عندما كانت سرعتها ٥٠ كم/س أوجد سرعة السيارة اذا كانت المقاومة ٢٧ث.كجم

الحـــــل

$$\frac{م_1}{م_2} = \frac{ع_1}{ع_2}$$

$$\frac{٦ \times ٣}{٥٠} = \frac{٢٧}{ع_2}$$

$ع_2 =$ ٧٥ كم/س



الاحصاء

جمع البيـــانات

مصادر جمع البيانات

أولية (ميدانية)

تعريفها : هى المصادر التى نحصل منها على البيانات بشكل مباشر

أمثلة : المقابلة الشخصية ، الاستبيان واستطلاع الرأى

مميزاتها :الدقة

عيوبها : تحتاج الى وقت ومجهود كبير كما أنها مكلفة ماديا

ثانوية (تاريخية)

تعريفها :هى المصادر التى يتم الحصول عليها من أجهزة أو هيئات رسمية

أمثلة : نشرات الجهاز المركزى للتعبئة والاحصاء والانترنت ووسائل الاعلام

مميزاتها : توفير الوقت والجهد والمال

عيوبها : عدم الدقة أحيانا



أساليب جمع البيانات

اسلوب الحصر الشامل

تعريفه : يعنى جمع البيانات المتعلقة بالظاهرة محل الدراسة من جميع مفردات المجتمع الاحصائى

أمثلة : التعداد العام للسكان

مميزاته : الشمول وعدم التحيز والدقة فى النتائج

عيوبه يحتاج الى وقت طويل ومجهود كبير وتكلفة باهظة

اسلوب العينات

تعريفه : يقوم على فكرة اختيار عينة من المجتمع الاحصائى الذى تمثله ونجرى البحث على العينة وما نحصل عليه من نتائج يتم تعميمه على المجتمع بأكمله

مميزاته : توفير الوقت والجهد والتكاليف

عيوبه : عدم دقة النتائج اذا كانت العينة المختارة لا تمثل المجتمع تمثيلا جيدا

أنواع العينات

- عينات غير عشوائية
- عينات عشوائية
  - عينة عشوائية بسيطة
  - عينة عشوائية طبقية

عدد مفردات الطبقة فى العينة

$$= \frac{\text{عدد مفردات الطبقة الكلى}}{\text{عدد مفردات المجتمع الكلى}} \times \text{عدد مفردات العينة}$$

مثال

اذا كان هناك فى احدى الكليات الجامعية ٤٠٠٠ طالب بالسنة الاولى ، ٣٠٠٠ طالب بالسنة الثانية ، ٢٠٠٠ طالب بالسنة الثالثة ، ١٠٠٠ طالب بالسنة الرابعة ، وأردنا سحب عينة طبقية حجمها ٥٠٠ طالب تمثل فيها كل طبقة بحسب حجمها فاحسب عدد مفردات كل طبقة فى العينة

الحـــــل

العدد الاجمالى للطلاب =٤٠٠٠+٣٠٠٠+٢٠٠٠+١٠٠٠=١٠٠٠٠ طالب

عدد مفردات الطبقة الاولى من العينة $= \frac{٤٠٠٠}{١٠٠٠٠} \times ٥٠٠ = ٢٠٠$ طالب

عدد مفردات الطبقة الثانية من العينة $= \frac{٣٠٠٠}{١٠٠٠٠} \times ٥٠٠ = ١٥٠$ طالب

عدد مفردات الطبقة الثالثة من العينة $= \frac{٢٠٠٠}{١٠٠٠٠} \times ٥٠٠ = ١٠٠$ طالب

عدد مفردات الطبقة الرابعة من العينة $= \frac{١٠٠٠}{١٠٠٠٠} \times ٥٠٠ = ٥٠$ طالب

حاول بنفسك مدسة اعدادية بها ٣٥٠ طالب بالصف الاول ، ٣٥٠ طالبا بالصف الثانى ، ٣٠٠ طالب بالصف الثالث ويرغب مجلس ادارتها فى اقامة ندوة علمية لعينة من الطلبة اختيرت عينة تتكون من ١٠٠ طالب تمثل فيها كل طبقة بحسب حجمها احسب عدد مفردات كل طبقة ؟

التشتت

تذكر أن

مقاييس النزعة المركزية هى :

* الوسط الحسابى = $\frac{\text{مجموع قيم المفردات}}{\text{عددها}}$

فالوسط الحسابى للقيم ١٥ ، ٥ ، ٢٠ ، ١٠ ، ٢٥ هو $\frac{١٥+٥+٢٠+١٠+٢٥}{٥} =$

$= \frac{٧٥}{٥} = ١٥$

* الوسيط هو القيمة التى تتوسط مجموعة القيم بعد ترتيبها تصاعديا أو تنازليا

فالوسيط للقيم ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٨ ، ١١ هو ٦

والوسيط للقيم ٤ ، ٥ ، ٦ ، ١١ هو $\frac{٥+٦}{٢} = ٥\frac{١}{٢}$

* المنوال لمجموعة من القيم هو القيمة الأكثر تكرار بين القيم

فالمنوال للقيم ٤ ، ٧ ، ٥ ، ٧ ، ٧ هو ٧

والمنوال للقيم ٥ ، ٦ ، ٥ ، ٧ ، ٥ ، ٥ هو ٥

حاول بنفسك

اذا كان الوسط الحسابى للاعداد ٣ك - ٣ ، ٣ك - ١ ، ٢ك + ١ ، ٢ك + ٣ ،

٢ك + ٥ هو ١٣ احسب قيمة ك

التشتت لأى مجموعة من القيم يقصد به التباعد أو الاختلاف بين مفرداتها ويكون التشتت صغيرا اذا كان الاختلاف بين المفردات قليلا ويكون التشتت كبيرا اذا كان الاختلاف بين المفردات كبيرا وهو يعبر عن مدى تجانس المجموعات



اذا تساوت جميع المفردات فإن التشتت = صفر

مقايس التشتت

المدى

هو الفرق بين أكبر قيمة واصغر قيمة لمجموعة من المفردات وهو أبسط وأسهل طرق قياس التشتت ولكن من عيوبه أنه يتأثر كثيرا بالقيم المتطرفة

الانحراف المعيارى

هو الجذر التربيعى الموجب لمتوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابى ويرمز له بالرمز سيجما σ

$$= \sqrt{\frac{\text{مجـ}(\text{س} - \bar{\text{س}})^{2}}{\text{ن}}}$$

حيث ن عدد المفردات

$\bar{\text{س}}$ الوسط الحسابى

الانحراف المعيارى لمجموعة من المفردات

احسب الانحراف المعيارى لمجموعة القيم ٨ ، ٩ ، ٧ ، ٦ ، ٥

س	س - $\bar{س}$	$(س - \bar{س})^٢$
٨	٨ − ٧ = ١	١
٩	٩ − ٧ = ٢	٤
٧	٧ − ٧ = ١	٠
٦	٦ − ٧ = -١	١
٥	٥ − ٧ = -٢	٤
	المجـــموع	١٠

الوسط الحسابى $\bar{س} = \frac{٨ + ٩ + ٧ + ٦ + ٥}{٥} = ٧$

$\therefore \sigma = \sqrt{\frac{١٠}{٥}} = \sqrt{٢} = ١,٤$

الانحراف المعيارى لتوزيع تكرارى

$$\sigma = \sqrt{\frac{مجـ (س - \bar{س})^٢ ك}{مجـ ك}}$$

تمرين **الجدول التالى يبين اعمار ٢٠ شخصا بالسنين اوجد الانحراف المعيارى للاعمار**

العمر	١٥	٢٠	٢٢	٢٣	٢٥	٣٠	المجموع
عدد الأشخاص	٢	٣	٥	٥	١	٤	٢٠



س	ك	س×ك	س-س̄	(س-س̄)^{٢}	(س-س̄)^{٢}×ك
١٥	٢	٣٠	١٥-٢٣=-٨	٦٤	١٢٨
٢٠	٣	٦٠	٢٠-٢٣=-٣	٩	٢٧
٢٢	٥	١١٠	٢٢-٢٣=-١	١	٥
٢٣	٥	١١٥	٢٣-٢٣=٠	٠	٠
٢٥	١	٢٥	٢٥-٢٣=٢	٤	٤
٣٠	٤	١٢٠	٣٠-٢٣=٧	٤٩	١٩٦
مجـ	٢٠	٤٦٠			٣٦٠

$\sigma = \sqrt{\frac{٣٦٠}{٢٠}} = \sqrt{١٨} \approx ٤,٢٤$ سنة